

LQ Regulátor

Václav Krauz, Jan Suchý
krauzv@fel.cvut.cz, [suchyj1@fel.cvut.cz](mailto:suchyjl@fel.cvut.cz)

28. listopadu 2002

Obsah:

1 Úvod	2
Princip optimality	
Ztrátová funkce a tvar regulátoru	
Riccatiho rovnice a časově invariantní regulátor	
2 Řešení	3
3 Závěr	8
4 Literatura	8
5 Příloha	9
Řešení Riccatiho rovnice v Matlabu	
Simulační schéma pro Simulink	

1 Úvod

LQ (linear – quadratic) je kvadraticky optimální regulátor pro lineární systémy. V této úloze budeme navrhovat regulátor, který řeší problém optimálního přechodu z daného stavu x_0 do počátku. (Optimálního ve smyslu minimalizace kvadratického kritéria.)

Princip optimality

Jestliže zvolíme ztrátovou funkci (kritérium), kterou minimalizujeme aditivní, tj. Ztráta řízení v časovém intervalu $T_C = 0, 1, \dots, N-1$ je součtem ztrát v dílčích intervalech $T_1 = 0, 1, \dots, t-1$ a $T_C = 0, 1, \dots, N-1$, můžeme využít tzv. princip optimality:

Jestliže optimálním řízením u na intervalu $T_1 = 0, 1, \dots, t-1$ přivedeme systém do stavu $x(k)$ a dále řídíme optimálně na intervalu $T_2 = t, \dots, N-1$ je řízení na celém intervalu $T_C = 0, 1, \dots, N-1$ optimální.

Ztrátová funkce a tvar regulátoru

Pro naši úlohu zvolíme ztrátovou funkci ve tvaru:

$$V(x(t_0), u_{t_0}^{N-1}, t_0) = \frac{1}{2} x^T(N) Q(N) x(N) + \sum_{t=t_0}^{N-1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Potom lze princip optimality zapsat jako:

$$V^*(x(t), t) = \min \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + V^*(x(t+1), t+1) \right\} = \min \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + V^*(A(t)x(t) + B(t)u(t), t+1) \right\} \quad (2)$$

kde optimální hodnotu funkce V značíme V^* .

Vidíme, že při hledání optimálního řízení můžeme postupně samostatně minimalizovat každý člen ztrátové funkce počínaje posledním, který je roven:

$$V^*(x(N), N) = \frac{1}{2} x^T(N) Q(N) x(N) \quad (3)$$

Při dalším postupu (aplikací principu optimality a minimalizace doplněním na úplný čtverec) bychom zjistili, že optimální hodnotu ztrátové funkce lze vyjádřit jako kvadratickou formu stavu:

$$V^*(x(t), t) = \frac{1}{2} x^T(t) P(t) x(t) \quad (4)$$

a optimální řídicí posloupnost je:

$$u^*(t) = -(R(t) + B^T(t)P(t+1)B(t))^{-1} (S^T(t) + B^T(t)P(t+1)A(t))x(t) \quad (5)$$

To lze interpretovat jako řízení pomocí stavové zpětné vazby:

$$u^*(t) = -K(t)x(t) \quad (6)$$

kde K je tzv. Kalmanovo zesílení, které je v tomto případě časově proměnné.

Riccatiho rovnice a časově invariantní regulátor

Přepíšeme-li (2) pomocí zápisu minimální hodnoty ztrátové funkce kvadratickou formou (4), dostaneme Riccatiho diferenční rovnici. Pro stabilizovatelné systémy a $N \rightarrow \infty$ konverguje řešení Riccatiho rovnice ke kvadratické formě $P(t) \rightarrow P$, která je pozitivně semidefinitní a symetrická. Z toho získáme Kalmanovo zesílení pro sice suboptimální, ale zato časově invariantní regulátor:

$$K(t) \rightarrow K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (7)$$

Amplitudová a fázová bezpečnost

V jednorozměrném (SISO) případě se frekvenční charakteristika otevřené regulační smyčky (9) vyhýbá kružnici $k = (S = [-1, 0j], r = \gamma)$, kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + N^T P N}} \quad (8)$$

z čehož plynou vztahy pro amplitudovou a fázovou bezpečnost:

$$\Delta A = \left\langle \frac{1}{1 + \gamma}, \frac{1}{1 - \gamma} \right\rangle \quad \varphi = \arcsin \gamma \quad (9)$$

2 Řešení

Spojité systém s přenosem

$$G(s) = \frac{(s+5)(s-64)(s+28 \pm 35j)}{(s+1 \pm 10j)(s-1 \pm 25j)(s-3)}$$

budeme chtít řídit pomocí diskretního stavového regulátoru. Proto provedeme diskretizaci (s periodou vzorkování $T = 0,1s$) a transformaci na stavový model. Výsledkem je diskretní systém:

$$M = \begin{bmatrix} -1.0755 & -0.5320 & -0.1251 & -0.0349 & -0.0349 \\ 0.5949 & -1.1312 & -0.1120 & -0.2909 & 0.2659 \\ 2.9395 & 0.3193 & 0.9442 & -0.4247 & 0.3678 \\ 2.0331 & 1.2791 & 1.5951 & 0.8053 & 0.1647 \\ 0.2276 & 0.2328 & 0.3206 & 0.3832 & 1.0140 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0.0744 \\ 0.3674 \\ 0.5083 \\ 0.2276 \\ 0.0193 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.2500 \quad -0.0234 \quad -0.3943 \quad -2.0821 \quad -2.4524] \quad D = [0]$$

Nyní zvolíme matice Q a R , které nám určí konkrétní tvar kritéria. Velké hodnoty v R oproti Q znamenají, že preferujeme malou vynaloženou energii na akční zásah před rychlostí ustálení, při malých hodnotách v R preferujeme rychlé ustálení. Prvky na diagonálách matic váží jednotlivé stavy nebo vstupy, ostatní prvky váží součiny různých stavů nebo vstupů navzájem.

Několik příkladů, které vyzkoušíme:

1. Chceme minimalizovat akční zásah

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = [10]$$

3. Chceme malý akční zásah a první dvě stavové proměnné se musí rychle ustálit

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = [10]$$

2. Chceme minimalizovat dobu regulace

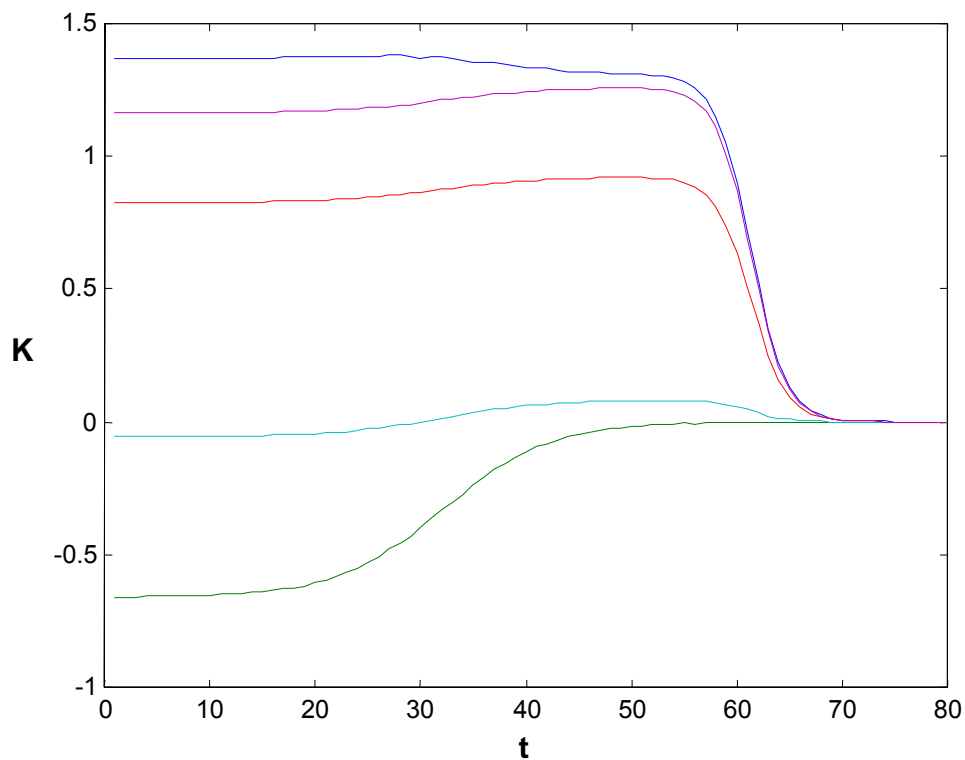
$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

4. Zde není Q diagonální – vážíme součiny stavových proměnných

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad R = [10]$$

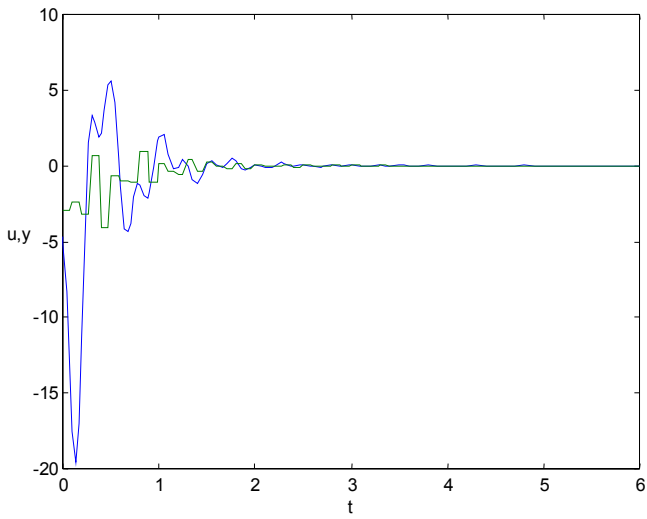
Matici K stavové zpětné vazby (Kalmanovo zesílení) získáme rekurentním řešením Riccatiho rovnice pro dostatečně velký počáteční čas. Jestliže se během řešení K už prakticky nemění, našli jsme limitní řešení Riccatiho rovnice a použijeme ho jako konstantní matici K regulátoru.

Na obrázku 1 je příklad hledání K pro Q_I, R_I .

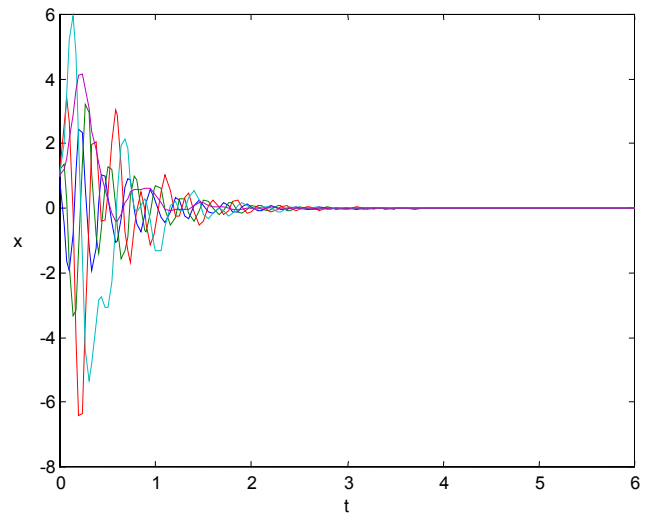


obr. 1

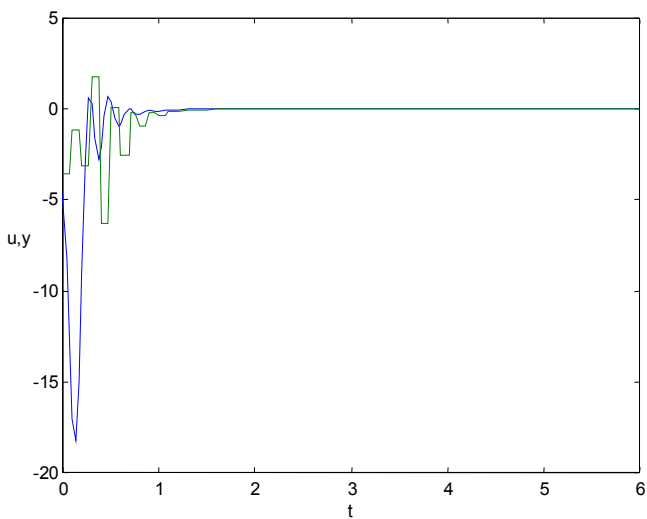
Zde je porovnání průběhů akčního zásahu regulátoru (diskrétní, zelená) a výstupu systému (modrá) na prvním grafu a průběhu stavových veličin na druhém grafu:



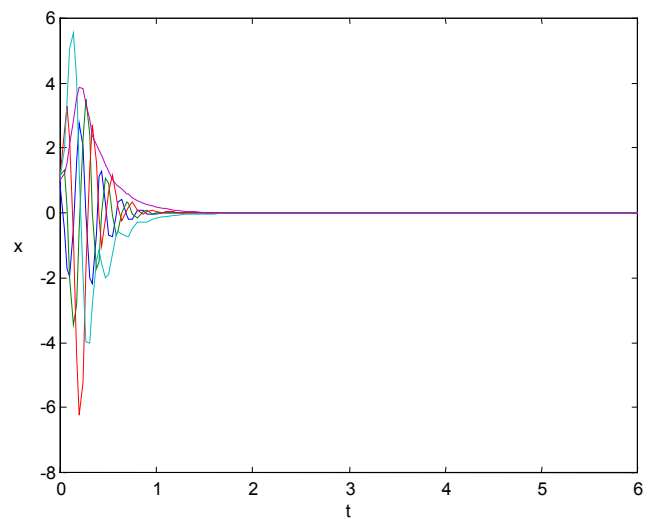
obr. 2
př. 1, akční zásah a výstup



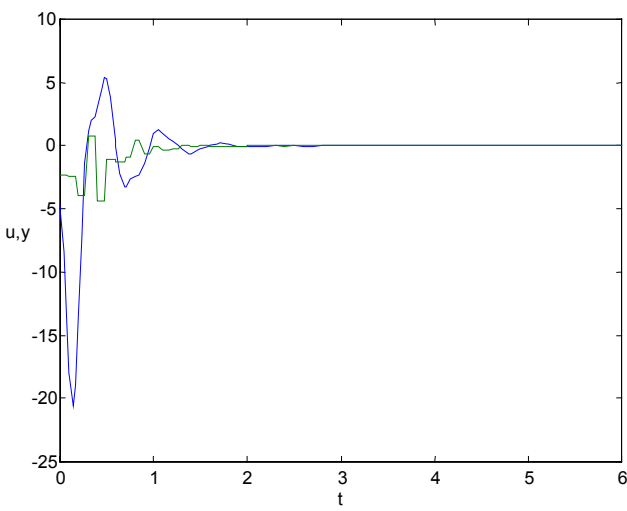
obr. 3
př. 1, průběh stavů



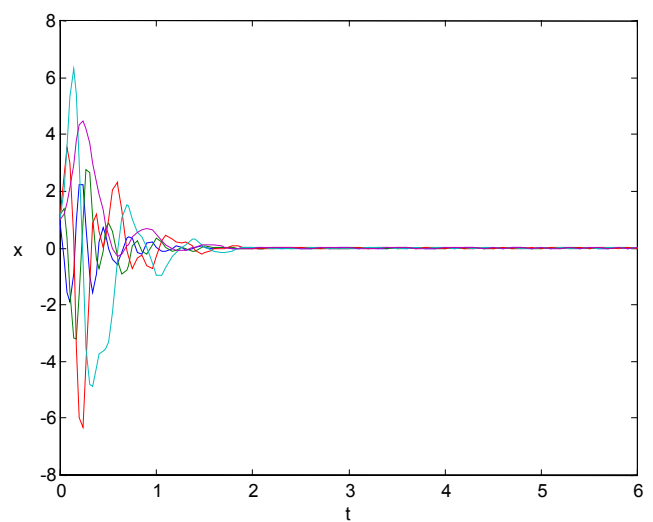
obr. 4
př. 2, akční zásah a výstup



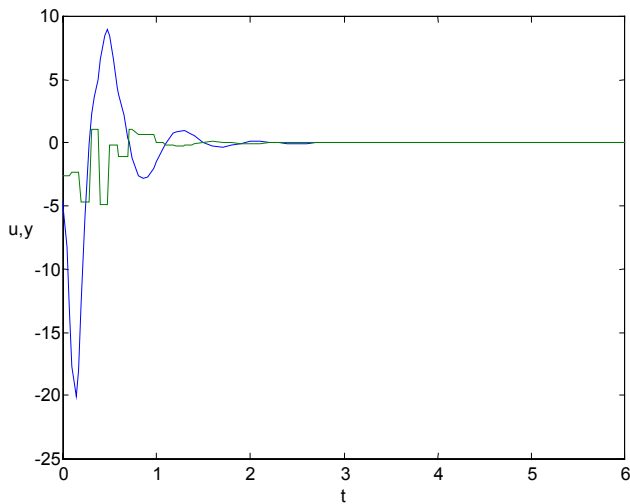
obr. 5
př. 2, průběh stavů



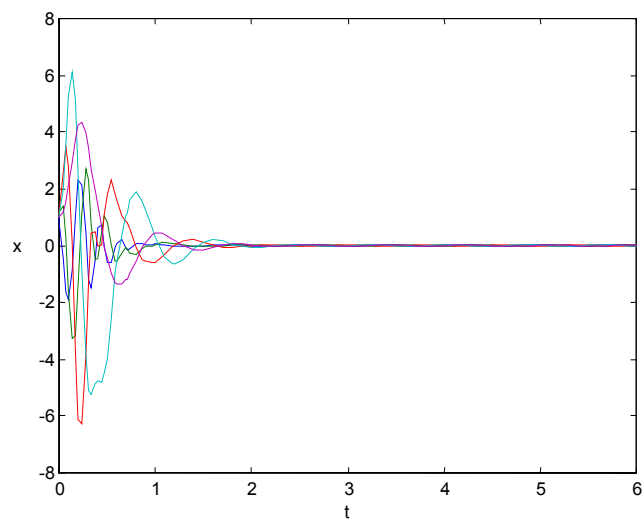
obr. 6
př. 3, akční zásah a výstup



obr. 5
př.3, průběh stavů



obr. 8
př. 4, akční zásah a výstup

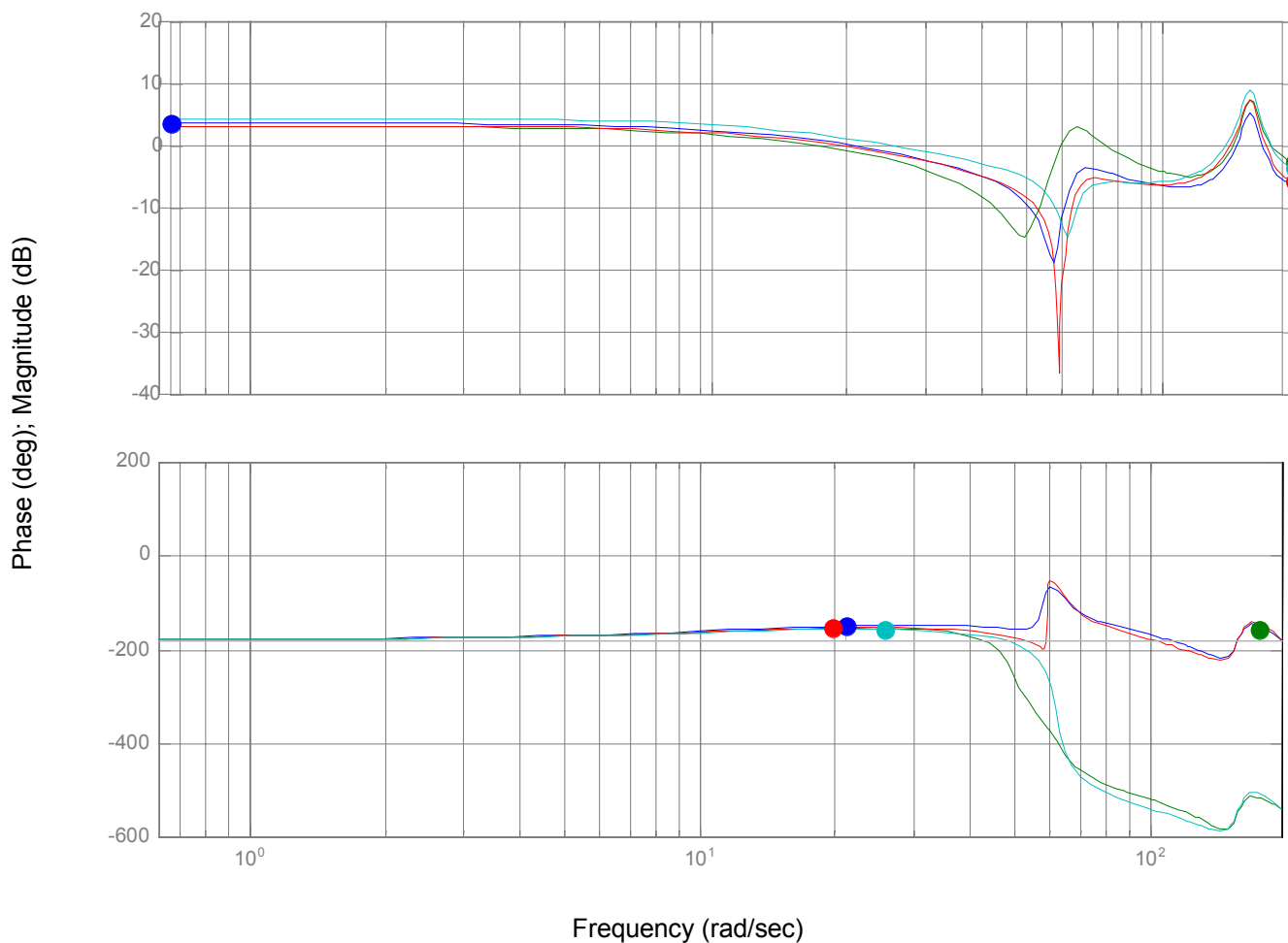


obr. 7
př. 4, průběh stavů

Na grafech je vidět (pozor na měřítko, není u všech stejné) vliv velikosti prvků matic \mathbf{Q} a \mathbf{R} , na rychlost módů systému v uzavřené smyčce a velikost akčního zásahu. Výsledky jsou v souladu s požadavky, podle kterých jsme volili kritérium.

Dále porovnáme frekvenční charakteristiky otevřené smyčky, tedy systému s přenosem:

$$F(s) = \mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}$$



obr. 9 – frekv. charakteristiky otevřené smyčky

Přiřazení barev jednotlivým charakteristikám je následující:

Příklad 1 – modrá, příklad 2 – zelená, příklad 3 – červená, příklad 4 – světle modrá.

Puntíky udávají hodnoty amplitudových a fázových bezpečností, jejichž hodnoty ještě přesně uvádíme v následující tabulce:

	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3	Příklad 4
Amplitudová bezp. (dB)	-3,71	2,39	5,62	3,57
Fázová bezp. (°)	30,9	23	26,4	23,9

tab. 1 – amplitudové a fázové bezpečnosti

Tyto hodnoty však nesouhlasí s teoreticky očekávanými výsledky. Podle [1] jsme spočítali amplitudové a fázové bezpečnosti dle vztahů (8) a (9). Výsledky jsou v následující tabulce:

	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3	Příklad 4
Amplitudová bezp. (dB)	<-1,39, 1,66>	<-0,80, 0,88>	<-1,17, 1,35>	<-1,23, 1,44>
Fázová bezp. (°)	10,0	5,6	8,3	8,8

tab. 1 – amplitudové a fázové bezpečnosti – teorie

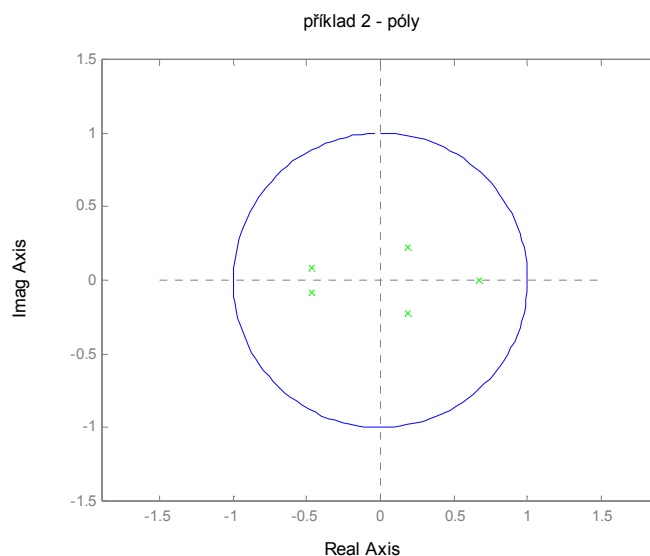
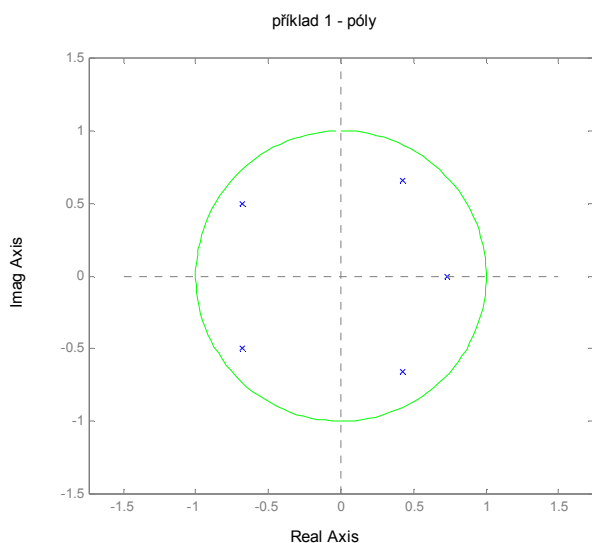
Tyto odhady navíc vypadají dost pesimisticky vzhledem k tomu, jak umírněná byla volba kritérií (matic Q a R). Kde je asi chyba?

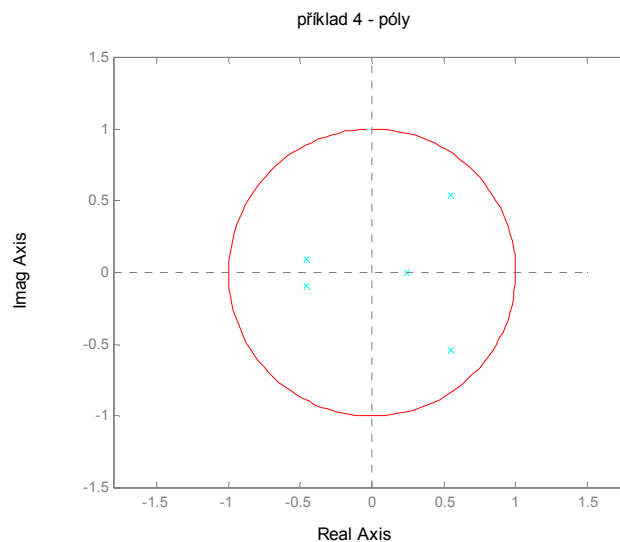
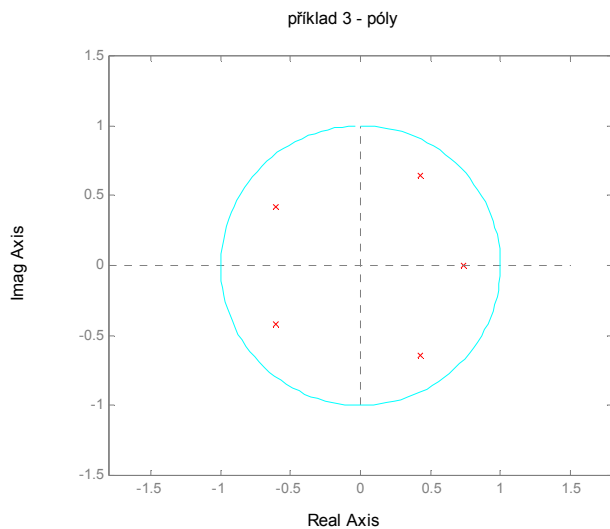
Nakonec zbývá ještě porovnat póly uzavřené smyčky, tedy vlastní čísla matice $M-NK$.

Příklad 1	Příklad 2	Příklad 3	Příklad 4
$-0.6822 \pm 0.4950i$	$-0.4638 \pm 0.0814i$	$-0.6036 \pm 0.4161i$	$-0.4607 \pm 0.0923i$
$0.4263 \pm 0.6588i$	$0.1840 \pm 0.2262i$	$0.4327 \pm 0.6416i$	$0.5469 \pm 0.5374i$
0.7336	0.6695	0.7337	0.2416

tab. 3 – póly uzavřené smyčky

Pro přehlednost je znázorníme v komplexní rovině. Čím blíže je pól počátku, tím má rychlejší dynamiku.





3 Závěr

Vyzkoušeli jsme čtyři různá nastavení kriteriální funkce, s různými požadavky na chování systému. Ověřili jsme na simulaci, že výsledný regulátor preferuje podle požadavků rychlost ustálení či velikost akčního zásahu. Co však nelze zajistit, je např. dodržení předepsaných tolerancí (víme sice, že chceme malý akční zásah, ale nemáme možnost to zaručit). Stejně tak nevíme, je-li možné např. omezit kmitavost výsledného přechodového děje, protože nemáme dopředu představu o tom, jaké budou póly uzavřené smyčky.

Podmínkou nalezení LQ regulátoru je pouze stabilizovatelnost systému. I přesto je vhodné zaručit rozumnou amplitudovou a fázovou bezpečnost, která v případě nevhodné volby kriteriální funkce může být libovolně malá. Pro to je však nutné vědět, jakým způsobem volit matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} . Zdá se, že řešením je nezadávat extrémně vysoké rozdíly hodnot mezi prvky \mathbf{Q} a \mathbf{R} . (Pro neznámou chybu nám ale teoretický výpočet nevyšel, viz. amplitudová a fázová bezpečnost výše).

Zajímavým porovnáním by bylo srovnání, jak moc se liší chování systému řízeného suboptimálním regulátorem s časově stálou maticí \mathbf{K} , od původního proměnného \mathbf{K} .

4 Literatura

- [1] Text ke cvičení předmětu MTR - LQ regulátor. 2002
- [2] Havlena, Vladimír. Moderní teorie řízení, doplňkové skriptum. ČVUT, Praha 2001
- [3] Vladimír Havlena a Jan Štecha. Moderní teorie řízení. ČVUT, Praha 2000

5 Příloha

Řešení Riccatiho rovnice v Matlabu

```

%Soustava
s = tf('s');
Gs = (s+5)*(s-64)*((s+28)^2 + 35^2) / ( ((s+1)^2 + 10^2)*((s-1)^2 + 25^2)*(s-3) );
[As, Bs, Cs, Ds] = ssdata(Gs);
Gss = ss(As, Bs, Cs, Ds);

%Diskretizace a převod na stavový model
Gd = c2d(Gss, 0.1)
[M N C D ] = ssdata(Gd);

%Váhové matice
%Q = diag([1e0 1e0 1e0 1e0 1e0]);
Q = [1e1 1e1 0 0 0; 1e1 1e1 0 0 0; 0 0 1e1 0 1e1; 0 0 0 1 0; 0 0 1e1 0 1e1];
R = 1e0;

%Řešení Riccatiho rovnice
%počáteční hodnota
P = Q;
%Horizont optimalizace (dostatečně velký, teoreticky má být nekonečno)
hor = 80;

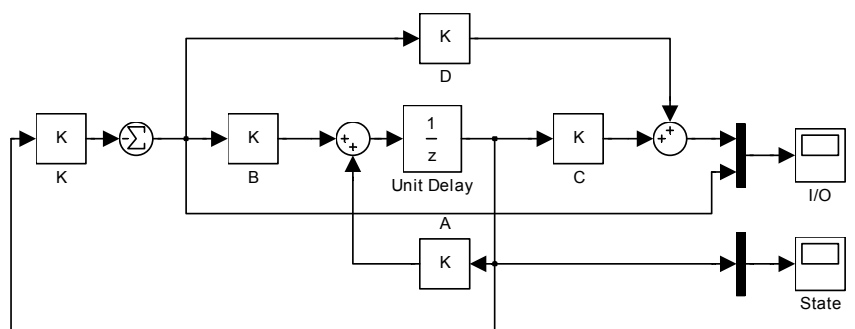
%Pole pro záznam hodnot Kalmanova zesílení měnících se s časem
Kpr = zeros(5, hor);

%Rekurzivní výpočet, dokud nedojdeme do t = 0
for t = hor : -1 : 1
    K = inv(R + N'*P*N)*N'*P*M;
    P = M'*P*M + Q - M'*P*N*K;
    Kpr(:,t) = K';
end

%Vykreslí průběh Kalmanova zesílení
figure(1);
plot(Kpr');
    
```

Simulační schéma pro Simulink

Diskretizovaný model soustavy řízený diskretním regulátorem.



Původní spojité model soustavy řízený diskretním regulátorem.

