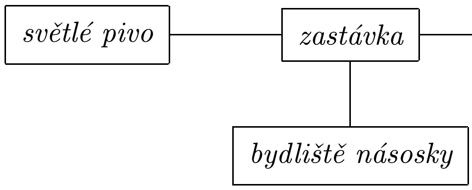
Spolehlivost a komplexní řízení jakosti

21. května 2003

Pracovní verze příkladů počítaných na cvičeních

- **Příklad 1 (Hospoda)** *Na půl cesty mezi dvěmi hospodami je autobusová zastávka. Autobusy jezdí z jedné hospody do druhé v pravidelných intervalech. Násoska chodí pravidelně na zastávku a odjíždí prvním autobusem do hospody. Po roce si všiml, že do jedné z hospod chodí častěji. Jak je to možné?*

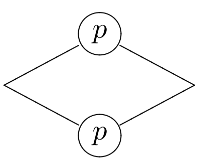


- **Příklad 2 (Věže)** *Jaká je pravděpodobnost, že se náhodně rozložených 8 věží na šachovnici neohrožuje?*

- **Příklad 3 (Součet kostek)** *Mějme 3 hrací kostky. Jaká je pravděpodobnost, že hodíme jedním vrhem součet větší než 10?*

- **Příklad 4 (Porovnání kostek)** *Co je pravděpodobnější: hodit 1 kostkou 4 hody aspoň jednou šestku nebo 2 kostkami 24 hody aspoň jednou dvě šestky?*

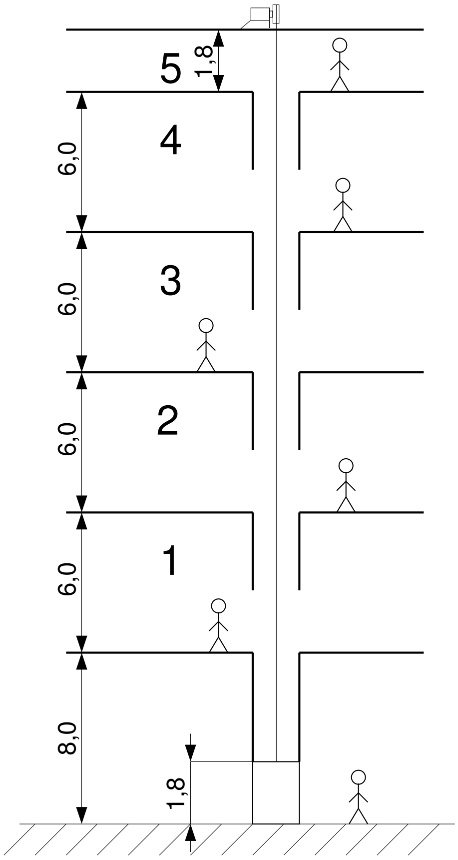
- **Příklad 5 (Žárovky)** *Jaká je pravděpodobnost, že bude svítit aspoň jedna žárovka? Pravděpodobnost, že žárovka svítí je* $p = 0.7$.



- **Příklad 6 (Manželé)** *Na ples přišlo n párů. Jaká je pravděpodobnost, že při dámské volence spolu tančí aspoň jeden manželský pár za předpokladu náhodné volby tanečníků?*

► **Příklad 7 (Sraz)** *Dva přátelé si dají sraz mezi 17:00 a 18:00. Přijdou náhodně a čekají na sebe 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají.*

► **Příklad 8 (Výtah)** *Výtah*



1 Základní statistické pojmy

<u>**Def:**</u> **Statistiská jednotka** : elementární prvek statistického souboru, na kterém pozorujeme vlastnosti, které nás z hlediska účelu statistického zkoumání zajímají
<u>**Def:**</u> **Statistický soubor** : soubor statistických jednotek.
<u>**Def:**</u> **Rozsah** statistického souboru: počet statistických jednotek ve statistickém souboru.

2 Základní charakteristiky

2.1 Momenty

Počáteční moment k-tého stupně :

$$m'_{x,k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}.$$

Centrovaný moment k-tého stupně :

$$m_{x,k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k}{n}.$$

2.2 Průměry

Základní vlastností, kterou se budeme zabývat jsou průměry. Nejběžnější je tzv. **aritmetický průměr**:

$$M_1(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

Dále definujme **kvadratický průměr**:

$$M_2(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

a **harmonický průměr:**

$$M_{-1}(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Obecný průměr k-tého stupně (pro $k \neq 0$) lze vyjádřit vzorcem:

$$M_k(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Aritmetický průměr je jediný, který nevyžaduje splnění podmínky $x_i > 0$! Je zřejmé, že hodnota průměru je závislá na konkrétně zvolené hodnotě k. Čím je k větší, tím je větší M_k:

$$\forall k_1 < k_2 : M_{k_1} < M_{k_2}$$

2.3 Vlastnosti aritmetického průměru

- součet odchylek od aritmetického průměru je roven 0:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1} nx_i - n \cdot \overline{x} = 0,$$

- příčtení konstanty :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \pm \frac{1}{n} \cdot n \cdot A) = \overline{x} \pm A,$$

- násobení konstantou :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\overline{x}}{c}.$$

2.4 Rozptyl

Druhý centrální moment :

$$s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}.$$

Lemma: $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ je minimální právě tehdy, jestliže $a = \overline{x}$.

Dk:

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

$$F'(a) = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot a \Rightarrow a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}.$$

♢

Lemma: „Rozptyl = průměr kvadrátů - kvadrát průměru.“

$$s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

Dk:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \overline{x} + \overline{x}^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2 \cdot \overline{x}}{n} + \sum_{i=1} nx_i + n \cdot \frac{\overline{x}^2}{n}$$

$$s^2 = \overline{x^2} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

♢

Lemma: Mezi počátečními a centrovanými momenty platí vztah :

$$m_{x,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j \cdot {m'}_{x,1}^{j} \cdot {m'}_{x,k-j}.$$

Dk:

$$m_{x,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j \cdot x_i^{k-j} \cdot \overline{x}^j = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} \cdot (-1)^j \cdot \overline{x}^j \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k-j}}{n}$$

$$m_{x,k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j \cdot {m'}_{x,1}^{j} \cdot {m'}_{x,k-j}.$$

$\diamondsuit$

Lemma:

$$s^2 = m_{x,2} = {m'}_{x,2} - {m'}_{x,1}^{2}$$

Dk:

$$\begin{aligned}
m_{x,2} &= \sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(-1)^j \cdot {m'}_{x,1}^{j} \cdot {m'}_{x,2-j} \\
&= \binom{2}{0}(-1)^0 \cdot {m'}_{x,1}^{0} \cdot {m'}_{x,2-0} + \binom{2}{1}(-1)^1 \cdot {m'}_{x,1}^{1} \cdot {m'}_{x,2-1} + \binom{2}{2}(-1)^2 \cdot {m'}_{x,1}^{2} \cdot {m'}_{x,2-2} \\
&= m'_{x,2} - 2 \cdot m'_{x,1} \cdot m'_{x,1} + {m'}_{x,1}^{2} \\
&= m'_{x,2} - {m'}_{x,1}^{2}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2.5 Četnosti a spojitý případ

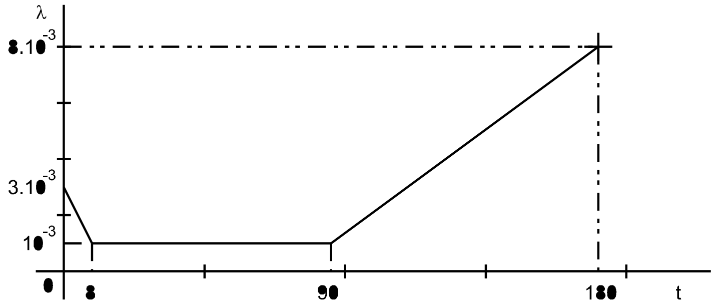
Často se setkáváme s případy, kdy jsou jednotlivým prvkům statistického souboru x_i jsou přiřazeny četnosti výskytu n_i. Pak lze obecný vzorec průměru napsat takto :

$$M_k(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{s} x_i^k \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{s} n_i}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

3 Charakteristiky spolehlivosti

Příklad: Nalezněte vztah pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu z intenzity.
Příklad: Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s z pravděpodobnosti bezporuchového provozu $R(t)$.
Příklad: Předpokládejme nyní stroj, který se porouchá čtyřikrát za týden. Jaká je doba T_β zaručující, že pravděpodobnost bezporuchového provozu je $\beta = R(T_\beta) = 0.99$?
Příklad: Máme systém s intenzitou poruch danou Weibullovým rozdělením s $m = \frac{1}{4}$. Intenzita poruch v čase $t = 1$ je $\lambda(1) = \frac{1}{5}$. Určete střední dobu poruch tohoto systému.

Příklad: Intenzita poruch daného systému je dána průběhem na obrázku. Spočítejte pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ v čase t=150.

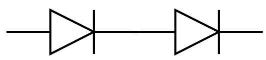


Příklad: Pro systém se stejnou intenzitou poruch, jako v předchozím příkladu, určete čas τ, pro který $R(\tau) = 0.6$.

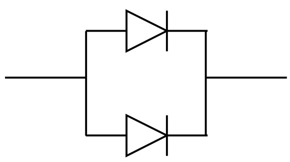
Spolehlivost soustav

Předpoklad : každý prvek i každá soustava se nacházejí vždy v jednom ze stavů : **bezporuchovém stavu** nebo **ve stavu poruchy**. Pro elektrické obvody používáme tři stavy : **bezporuchový porucha zkratem**, **porucha přerušením**.

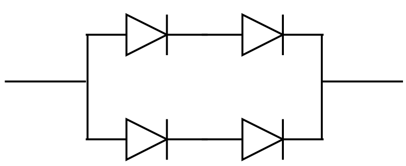
► **Příklad 9 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sériové)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy, $R =$? Pravděpodobnost bezporuchového provozu jedné diody je p, diody jsou stejné.*



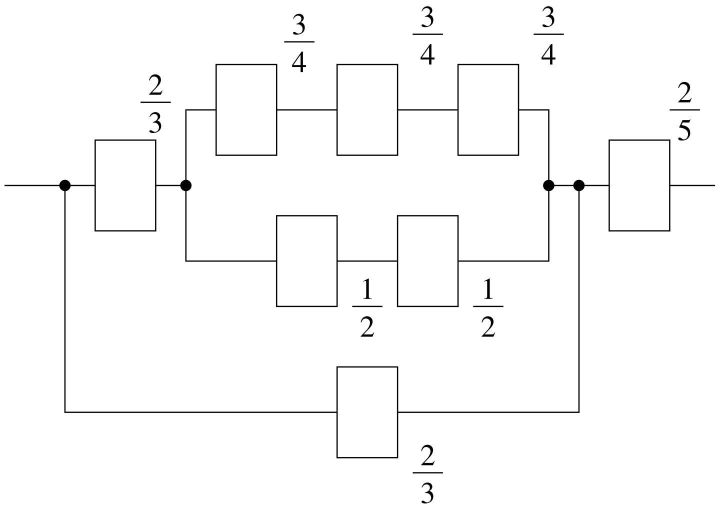
► **Příklad 10 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - paralelní)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jedné diody je p, diody jsou stejné.*



► **Příklad 11 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jedné diody je p, diody jsou stejné.*



▶ **Příklad 12 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy.*



Soustava m z n

n prvků soustavy, m musí správně pracovat - bezporuchový stav
$\binom{n}{m}$ paralelních spojů mezi vstup/výstup
Prvky shodné, nezávislé $\Rightarrow$ binomické rozdělení.

- Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n

$$f(m,n,p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

- Pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n

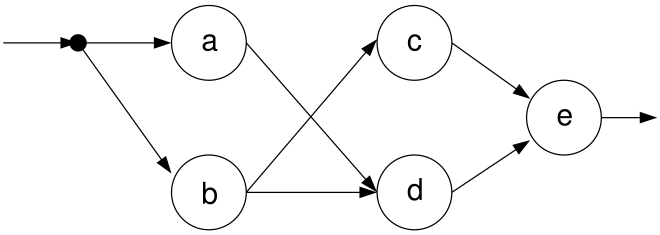
$$R = \sum_{k=m}^{n} f(k,n,p) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- $m = 1$ paralelní soustava.
- $m = n$ sériová soustava.

▶ **Příklad 13 (Ocelové lano - soustava m z n)** *Ocelové lano má 4 vlákna, správná správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna. $n = 4$; $m = 2$; Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je $p = 0.9$; $R =$?*

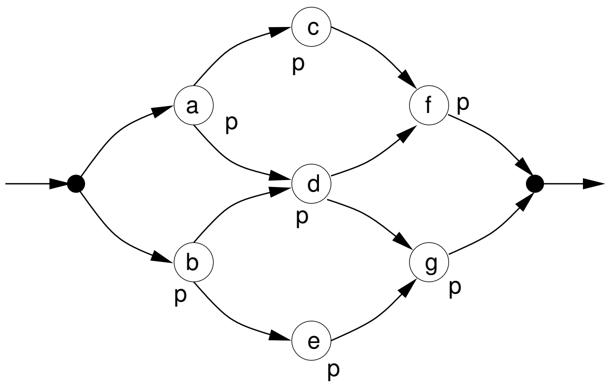
▶ **Příklad 14 (Kombinované soustavy - metoda seznamu)**

$$a)\quad P(a)=\frac{3}{4};\ P(b)=\frac{5}{6};\ P(c)=P(d)=\frac{2}{3};\ P(e)=\frac{7}{8}; R=?$$
$$b)\quad P(a)=P(b)=\ldots=P(e)=p; R=?$$

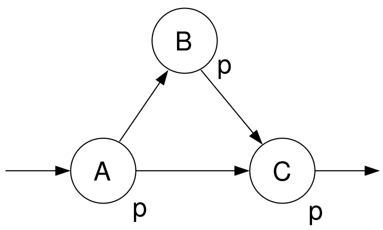


▶ **Příklad 15 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu)** *zadání viz předchozí příklad b)*

▶ **Příklad 16 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu)** $R=?$



▶ **Příklad 17 (Soustavy)** $R=?$



Metoda drah a řezů

Vhodná pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu soustav, ve kterých nenastávají závislé poruchy.

Sled : posloupnost hran, ke které lze najít takovou posloupnost uzlů, že pro každou hranu je odpovídající uzel uzlem vstupním a následující uzel uzlem výstupním.

Dráha (Minimální sled) : takový sled ve kterém jsou všechny uzly různé (obsahuje minimální počet hran).

Hranový řez : množina hran grafu, ze kterých je alespoň jedna hrana obsažena v každé dráze ze vstupního do výstupního uzlu grafu. Odstranění hran řezu z grafu znamená přerušení všech drah mezi vstupem a výstupem.

Minimální řez : řez, který obsahuje minimální počet hran.

Jestliže má soustava i drah mezi vstupem a výstupem, potom je spojení mezi vstupem a výstupem tehdy, když alespoň jedna dráha je bez poruchy.

$$R = P(T_1 + T_2 + \ldots + T_i),\ \textit{kde } T_i \textit{ je bezporuchový stav drahy } i$$

Porucha soustavy nastane, jestliže se z grafu soustavy odstraní alespoň jeden minimální řez.

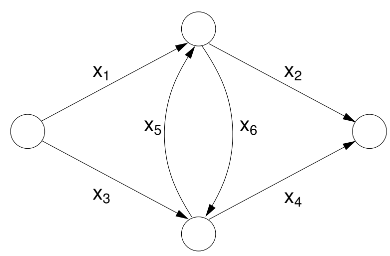
$$Q = P(\overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \ldots + \overline{C}_j),\ \textit{kde } C_j \textit{ je porucha minimálního řezu } j$$

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ P(A+B+C) &\leq P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

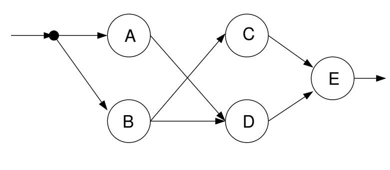
Aproximace :

$$\begin{aligned} R &\leq P(T_1) + P(T_2) + \ldots + P(T_i) \\ Q &\leq P(\overline{C}_1) + P(\overline{C}_2) + \ldots + P(\overline{C}_i) \\ R &\geq 1 - P(\overline{C}_1) + P(\overline{C}_2) + \ldots + P(\overline{C}_i) \end{aligned}$$

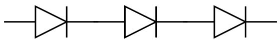
► **Příklad 18 (Soustava)** *Nalezněte sledy, minimální sledy, řezy a minimální řezy.*



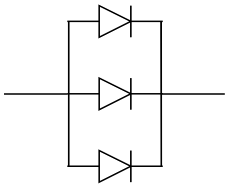
► **Příklad 19 (Soustavy)** $R =?$



▶ **Příklad 20 (Soustavy s více stavy prvků - sériové)** *soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu pz, pravděpodobnost přerušení pp, pravděpodobnost správné funkčnosti p, $p + pz + pp = 1$, diody jsou identické.*

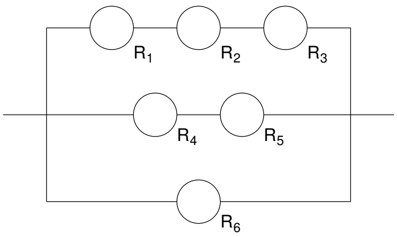


▶ **Příklad 21 (Soustavy s více stavy prvků - paralelní)** *soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu pz, pravděpodobnost přerušení pp, pravděpodobnost správné funkčnosti p, $p + pz + pp = 1$, diody jsou identické.*



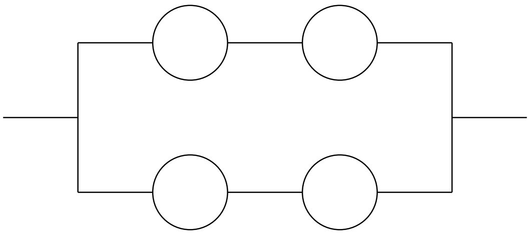
▶ **Příklad 22 (Dva stavy prvků)** *Pravděpodobnost bezporuchového provozu prvku i je $R_i = e^{-\lambda t}$. Jaká je pravděpodobnost bezporuchového provozu celé soustavy $R(t) =$? a $R(10) =$?*

$\lambda_1 = 0,9; \lambda_2 = 0,8; \lambda_3 = 0,7; \lambda_4 = 0,9; \lambda_5 = 0,8; \lambda_6 = 0,9$

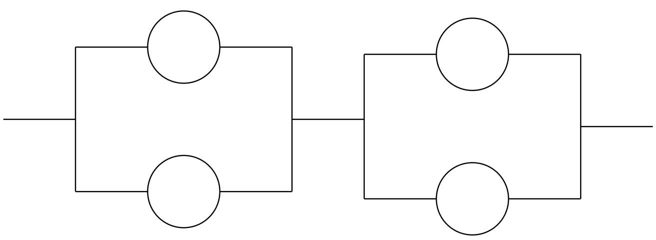


▶ **Příklad 23 (zálohování soustav)**

a)zálohování celého systému všechny prvky stejné, $R_a =?$.

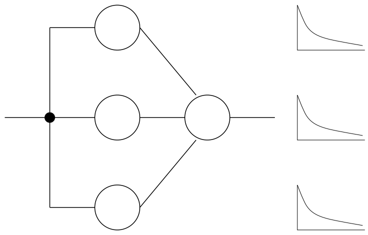


b)zálohování každého prvku všechny prvky stejné, $R_b =?$.



c) Je větší R_a nebo R_b ?

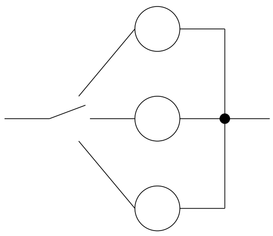
► **Příklad 24 (Majoritní zálohování)** *Soustava má lichý počet prvků* $(2n+1)$*, správná funkčnost je zaručena funguje-li alespoň* n *prvků. Jaká je pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy* $R =$*? Pro jaká* p *má smysl používat majoritní zálohování?*



Zálohování s přepínáním

Také se používá název zálohování s okamžitou náhradou nebo s okamžitou obnovou

Předpokládá se, že přepínač umí rozpoznat poruchu a samočinně přepíná. Nastane krátkodobé přerušení, které musí být přípustné.



Pro soustavu ze shodných a nezávislých prvků, kde prvky v záloze nestárnou, je pravděpodobnost m poruch dána Poissonovým rozdělením

$$f(m,a) = \frac{a^m}{m!}e^{-a},\ m = 0,1,,\dots$$

Při časově závislých pravděpodobnostech je výpočet složitý a s výhodou se používají Markovy modely.

4 Teorie obnovy

4.1 Systémy s okamžitou obnovou

Příklad: Máme systém s exponenciálním rozdělením poruch. Jaká je pravděpodobnost, že do času t nastanou právě 3 poruchy za předpokladu, že oprava každé poruchy trvá nulovou dobu ?

4.2 Systémy s konečnou dobou obnovy

Příklad: Máme sytém s distribuční funkcí poruch $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ a s distribuční funkcí oprav $G(t) = 1 - e^{-\beta t}$. Jaká je pravděpodobnost, že druhá porucha nastane v čase menším nebo rovném t? (F_{o2}) Jaká je tato pravděpodobnost pro $\lambda = 0,01$, $\beta = 0,1$ a $t = 600$?

Markovovy modely

Výpočet spolehlivosti opravovaných soustav nebo soustav se zálohováním bývá složitý. Pokud mají doby poruch a doby obnov exponenciální rozdělení, je výhodné použít Markovův model. V teorii Markovových procesů se omezíme na základní vlastnosti potřebné pro výpočet spolehlivosti soustav, teorie Markovových procesů je popsána v početné literatuře.

Markovovy modely jsou funkce dvou náhodných proměnných, stavu soustavy a doby nebo jiné veličiny, v závislosti na které stav sledujeme. Obě veličiny mohou být spojité nebo diskrétní, tomu odpovídají čtyři druhy modelů.

Def: **Markovův řetězec** : model s diskrétními stavy a diskrétním časem.

Def: **Markovův proces** : model s diskrétními stavy a spojitým časem.

Def: **Markovův model** : množina pravděpodobností udávajících pravděpodobnost přechodu z nějakého výchozího stavu do nějakého následujícího stavu. Pravděpodobnost závisí pouze na těchto dvou stavech a je zcela nezávislá na všech minulých stavech, kterými proces prošel.

Pro sestavení Markovova modelu se nejprve definují vzájemně se vylučující stavy soustavy. Soustava Markovových stavových rovnic popisuje pravděpodobnostní přechody z počátečních stavů do konečných stavů. Za předpokladů :

1. Pravděpodobnost přechodu z jednoho stavu do jiného v časovém intervalu Δt je rovna součinu $\lambda_i(t) \cdot \Delta t$, kde $\lambda_i(t)$ je intenzita pravděpodobnosti přechodu (hazard) příslušná ke dvěma stavům, mezi kterými přechod probíhá.

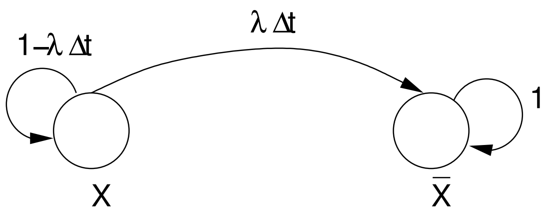
2. Pravděpodobnosti více než jednoho přechodu v časovém intervalu Δt jsou řádově menší a lze je zanedbat.

Def: **Homogenní model** : všechna $\lambda_i(t) = \lambda_i$ jsou konstantní.

Def: **Nehomogenní model** : některá $\lambda_i(t)$ je funkcí času.

Markovovy modely lze názorně vyjádřit orientovaným grafem (Markovův graf). Uzly grafu představují stavy soustavy, orientované hrany grafu označené pravděpodobnostmi přechodu udávají možné přechody.

Mějme soustavu s jediným neopravitelným prvkem. Pravděpodobnost bezporuchového stavu x v čase $t + \Delta t$ označme $P_x(t + \Delta t)$. Podobně pravděpodobnost, že soustava bude v poruchovém stavu $\overline{x}$ označíme $P_{\overline{x}}(t + \Delta t)$.



Markovův graf

Pro pravděpodobnosti jednotlivých stavů napíšeme rovnice

$$\begin{aligned} P_x(t+\Delta t) &= (1-\lambda(t)\Delta t)\cdot P_x(t), \\ P_{\overline{x}}(t+\Delta t) &= \lambda(t)\Delta t\cdot P_x(t)+P_{\overline{x}}(t), \end{aligned}$$

které přepíšeme do maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} P_x(t+\Delta t) \\ P_{\overline{x}}(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda(t)\Delta t & 0 \\ \lambda(t)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Získáme *matici pravděpodobností přechodu*, kterou lze sestavit přímo z Markovova grafu. Rovnice lze upravit na tvar :

$$\begin{aligned} \frac{P_x(t+\Delta t)-P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t)-P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t)P_x(t). \end{aligned}$$

Zavedením limity pro $\Delta t \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_x(t+\Delta t)-P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t)-P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t)P_x(t), \end{aligned}$$

získáme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \dot{P}_{\overline{x}} &= \lambda(t)P_x(t). \end{aligned}$$

Obvyklé počáteční podmínky jsou $P_x(0)=1$ a $P_{\overline{x}}(0)=0$. První rovnici lze řešit samostatně

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \frac{1}{P_x(t)}dP_x &= -\lambda(t)dt, \\ \ln P_x(t) &= K\int_0^t -\lambda(t)dt, \\ P_x(t) &= Ke^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \end{aligned}$$

Dosazením $P_x(0)=1$ získáme vztah pro pravděpodobnost bezporuchového provozu

$$R(t)=P_x(t)=e^{\int_0^t -\lambda(t)dt}.$$

Řešením druhé rovnice dostaneme

$$Q(t)=P_{\overline{x}}(t)=1-e^{\int_0^t -\lambda(t)dt}.$$

Pro $\lambda(t)=\lambda$ vyjádříme soustavu diferenciálních rovnic maticovým zápisem

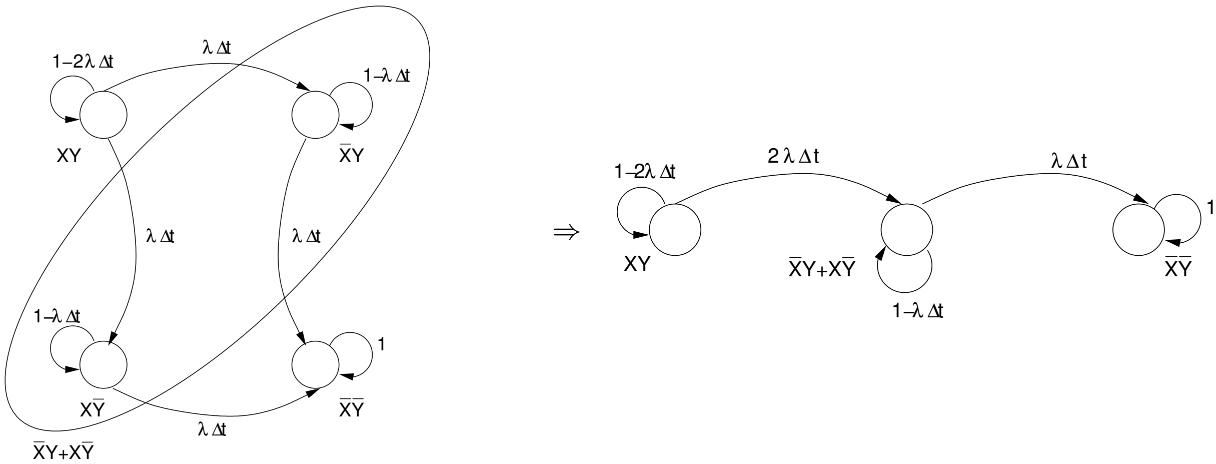
$$\begin{bmatrix} \dot{P_x}(t) \\ \dot{P}_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Získáme *matici intenzit*. Matice intenzit není stochastická, součet prvků v každém sloupci je roven nule. Matici intenzit lze také napsat přímo z Markovova grafu.

▶ **Příklad 25 (Soustava 2 prvky, každý prvek 2 stavy)** *Mějme soustavu se dvěma neopravitelnými prvky (X a Y), každý prvek má dva stavy (bezporuchový stav, porucha), intenzita poruch je pro oba prvky stejná a konstantní $\lambda_i(t) = \lambda$. Přechod ze stavu XY do stavu $\overline{XY}$ se nepředpokládá a prakticky nenastane. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici pravděpodobností přechodu a matici intenzit.*

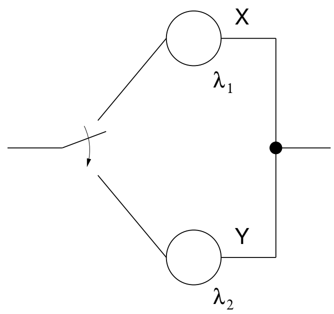
Slučování stavů

Složitost Markovova modelu závisí na počtu stavů soustavy. Soustava s m stavy bude popsána m diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Pro soustavu s n dvoustavovými prvky je počet stavů soustavy $m = 2^n$. Obecně pro prvky s k možnými stavy je $m = k^n$. Počet diferenciálních rovnic roste velmi rychle. Při výpočtu bezporuchovosti soustavy můžeme rozlišovat pouze stavy určené počtem porouchaných prvků a nezajímat se o to, které prvky mají poruchu. Počet stavů soustavy a počet diferenciálních rovnic se tím zmenší z 2^n na $n + 1$. Zjednodušení ukážeme na předchozím příkladě. Stavy $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$ sloučíme do jediného stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$.

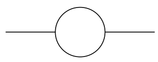


Ze stavu XY do stavu $X\overline{Y}+\overline{X}Y$ se lze dostat buď poruchou prvku X nebo poruchou prvku Y, proto pravděpodobnosti přechodu sčítáme. Ze stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ do stavu $\overline{XY}$ se dostane v případě, že zbylý prvek budu mít poruchu, proto je pravděpodobnost přechodu rovna $\lambda\Delta t$ (pouze jeden z nich může mít poruchu). Snadno lze nahlédnout, že aby došlo k zjednodušení musejí být intenzity ze stavů $\overline{X}Y$ nebo $X\overline{Y}$ do $\overline{XY}$ stejné. Intenzity ze stavu XY do stavu $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ mohou být různé.

▶ **Příklad 26 (Zálohování s přepínáním)** *Mějme soustavu se zálohováním přepínáním, prvek v záloze nestárne. Při poruše prvku X dojde k přepnutí na prvek Y. U prvku Y tedy nenastane porucha dříve než u prvku X. Intenzita poruchy prvku X je λ_1 a intenzita poruchy prvku Y je λ_2. Nakreslete Markovův graf.*

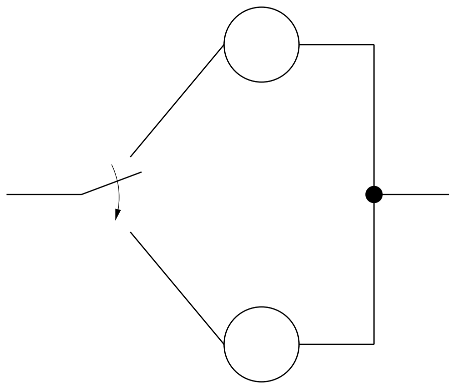


► **Příklad 27 (Soustava s opravou)** *Mějme jedno prvkovou soustavu s opravou. Porucha nastává s intenzitou λ a porouchaný prvek je opraven s intenzitou μ. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici intenzit a vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu a pravděpodobnost poruchy v čase t $P_x(t) =?$ a $P_{\overline{x}} =?$ pro počáteční podmínky $P_x(0) = 1$ a $P_{\overline{x}}(0) = 0$.*



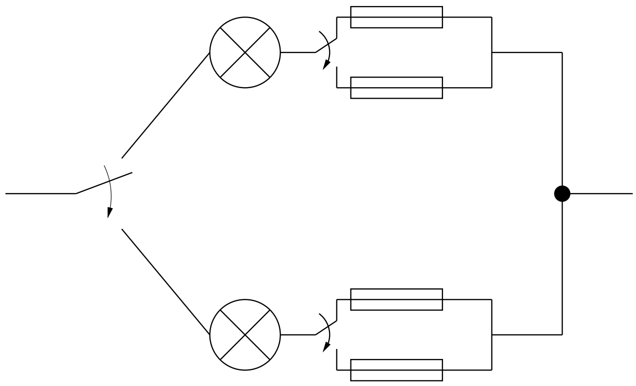
μ ... *oprava*
λ ... *porucha*

► **Příklad 28 (Zálohování s přepínáním)** *Mějme dvou prvkou soustavu s přepínáním a opravou. Prvky jsou identické a prvek v záloze nestárne. Při opravě jsou opraveny všechny prvky a soustava je přepnuta na první prvek. Intenzita poruch je λ a intenzita oprav je μ. Nakreslete Markovův graf.*



μ ... *oprava*
λ ... *porucha*

► **Příklad 29 (Zálohování s přepínáním opravou)** *Mějme soustavu s 2 deskami, pokud má jedna deska poruchu přepne se na druhou. Deska je vyměněna s intenzitou μ, když je porucha desky. Deska je složena z jedné žárovky a dvou pojistek. V případě, že dojde k poruše jedné pojistky dojde k přepnutí na druhou pojistku. Deska má poruchu v případě, že žárovka má poruchu nebo obě pojistky mají poruchu. Pojistky jsou identické a obě desky jsou také identické. Intenzita poruchy žárovky je λ, intenzita poruchy pojistky je γ a intenzita oprav je μ. Nakreslete Markovův graf a sestavte matici intenzit.*



μ ... *oprava*
λ ... *porucha žárovky*
γ ... *porucha pojistky*