

# 33IRO - Inteligentní robotika

## Plánování optimální trajektorie manipulátoru v neznámém prostředí

Pavel Jisl, Jindřich Očenášek, Radek Šmerák

Katedra Kybernetiky, Fakulta Elektrotechnická  
České Vysoké Učení Technické  
{jislp,ocenash,shmerak}@fel.cvut.cz

7. prosince 2003

### Abstrakt

Práce se zabývá inženýrským úkolem, který spočívá v návrhu optimální cesty pro přenos tělesa robotem. Pracovní plocha je pozorována kamerou a z obrazu získáme polohu počátečního a koncového bodu trajektorie. Je nutné vyřešit přímou a inverzní kinematickou úlohu a navrhnout pomocí plánovacího algoritmu optimální trajektorii přesunu tělesa v neznámém prostoru, což je cílem celého projektu.

## 1 Úvod

Úkolem úlohy je přenesení tělesa v neznámém prostředí po optimální trajektorii. Vyřešení úlohy jsme rozdělili do tří podproblémů, které lze řešit odděleně.

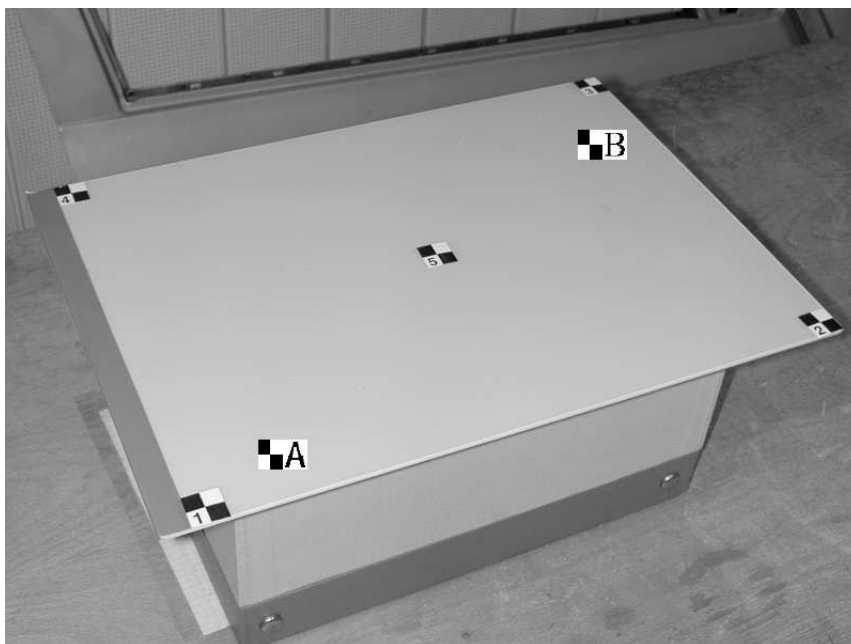
První krok spočívá ve zjištění souřadnic počátečního a koncového bodu. Tyto body jsou zadány pomocí obrázku, získaného z neznámé perspektivní kamery umístěné v neznámém bodě. Je tedy nutné nalézt transformaci, kterou získáme souřadnice počátečního a koncového bodu ze zadaného obrázku. Tímto se zabýváme v části 2.

Druhým krokem je popsání kinematiky robota. To spočívá v nalezení vztahu mezi pozicí chapadla v kartézských souřadnicích pracovní plochy a kloubovými souřadnicemi robota. Je tedy nutné vyřešit přímou a inverzní kinematickou úlohu. Řešení je v části 3.

Posledním krokem je vlastní plánování trasy, po které bude předmět přenášen. K tomu je využíván plánovací algoritmus A\*, kterým se zabýváme v části 4.

## 2 Zpracování obrazu z kamery

V této části úlohy se zabýváme zpracováním obrazu, získaného z perspektivní kamery, umístěné v neznámé poloze. V zadaném obrázku (obr. č. 1) jsou zobrazeny body **A** a **B** (tedy bod počáteční a cílový) a několik pomocných bodů se známými souřadnicemi. Tyto body využijeme pro výpočet transformační matice **H**.



Obrázek 1: Pohled kamery na pracovní plochu se zadanými body

Matici **H** vypočteme podle vztahu

$$\alpha_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kde  $u, v$  jsou souřadnice bodu v obraze a  $x, y$  jsou souřadnice v kalibrační rovině.  $\alpha_i$  je zvětšení, které je pro každou dvojici bodů  $[u_i, v_i]$  a  $[x_i, y_i]$  jiné. Matice **H** je regulární o velikosti  $3 \times 3$ . Při předpokladu ortogonalit os souřadných systémů je transformační matice **H** určena osmi lineárně nezávislými rovnicemi. Úpravami vztahu (1) pak pro každou dvojici bodů v obraze a na pracovní ploše získáváme následující dvojici rovnic.

$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & & & & & \\ -x_i & -y_i & -1 & 0 & 0 & 0 & u_i v_i & u_i y_i & u_i \\ 0 & 0 & 0 & -x_i & -y_i & -1 & v_i x_i & v_i y_i & v_i \\ \vdots & & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{33} \end{bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Pro určení matice  $\mathbf{H}$  jsou potřeba minimálně 4 rovnice (2), tedy čtyři různé body v obraze. Vlastní matici  $\mathbf{H}$  jsme vypočítali pomocí rozkladu SVD<sup>1</sup>. Tento singulární rozklad rozloží matici  $\mathbf{H}$  tak, že  $\mathbf{H} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T$ , kde  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  jsou ortogonální matice a  $\mathbf{S}$  je diagonální matice. Řešení soustavy pak tvoří poslední sloupec matice  $\mathbf{V}$ . Přesný popis řešení soustav rovnic pomocí SVD rozkladu je v [3]. Body  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  získáme pomocí rovnice (3).

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_i \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Výpočtem jsme získali následující matici homografie  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.0038 & 0.0008 & -0.3717 \\ 0.0006 & 0.0018 & -0.9283 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0020 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

### 3 Kinematika robota

V části kinematika robota se zabýváme řešením přímé a inverzní kinematické úlohy. Protože se pohyb robota uskutečňuje nastavováním kloubových souřadnic a pozice chapadla je udávána v kartézských souřadnicích pracovní plochy, je nutné získat transformační rovnice mezi těmito vyjádřeními.

Pro převod z kartézských souřadnic, které určují pozici chapadla, do kloubových souřadnic robota je nutné vyřešit přímou kinematickou úlohu, pro opačný převod (tedy z kloubových souřadnic do kartézských) se řeší kinematická úloha inverzní.

#### 3.1 Přímá kinematická úloha

Přímá kinematická úloha je řešení úlohy, kdy známe pozici chapadla v kartézské souřadné soustavě pracovního prostoru a je nutné vypočítat transformaci z těchto souřadnic do kloubových souřadnic robota.

Tuto úlohu jsme vyřešili pomocí Denavitovy-Hartenbergovy metody (viz. [1]). Tato metoda je výhodná, protože využívá homogenních souřadnic a pomocí jedné matice se dá vyjádřit jak rotace, tak translace. Vzhledem k tomu, že manipulátor má 3 klouby, dostáváme následující matice.

---

<sup>1</sup>Singular Value Decomposition

$$\mathbf{A}_{\mathbf{RG}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \mathbf{A}_{\mathbf{FE}} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{GF}} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6) \quad \mathbf{A}_{\mathbf{ch}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Výsledkem je pak následující výraz

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathbf{RG}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{GF}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{FE}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{ch}} \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

kde  $\begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}^T$  jsou souřadnice bodu  $\mathbf{G}$ .

### 3.2 Inverzní kinematická úloha

Inverzní kinematická úloha slouží k přepočtu ze známých kloubových souřadnic do kartézské soustavy souřadnic chapadla.

Inverzní kinematická úloha může mít pro nesingulární body až čtyři různá řešení. Výpočet jsme odvodili pomocí goniometrických funkcí. Výpočtem získaných vzorců získáme úhly pro dvě řešení (viz. obrázek 3.2) a další dvě získáme otočením v kloubu G (o úhel  $\alpha$ ).

$$x_r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10)$$

$$d = \sqrt{x_r^2 + (z - a)} \quad (11)$$

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{d^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right), \beta_2 = \arctan\left(\frac{x_r}{d}\right) \quad (12)$$

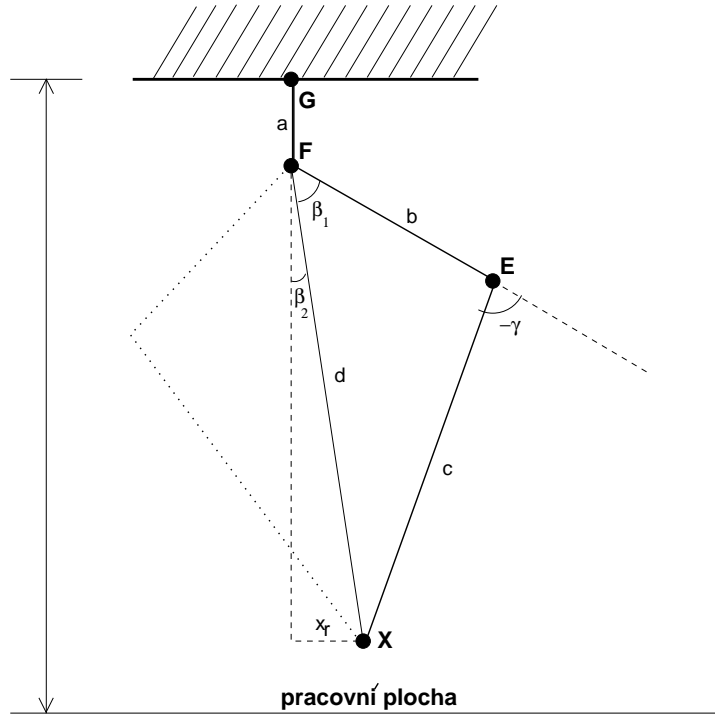
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad (13)$$

$$\gamma = 180^\circ - \arccos \frac{b^2 + c^2 - d^2}{2bc} \quad (14)$$

$$\alpha = \arctan \frac{y - y_p}{x - x_p} \quad (15)$$

## 4 Plánování

Tato část úlohy spočívá v naplánování nejkratší cesty z počátečního bodu do bodu koncového. Souřadnice těchto bodů jsme získali v části 2. Naším úkolem je najít



Obrázek 2: Nákres ramen robota s vyznačením důležitých hodnot

optimální (nejkratší) trajektorii, po které bude přesun proveden. Je nutné počítat s tím, že v pracovním prostoru jsou rozmístěné překážky s neznámou polohou, kterým se musí chapadlo robota vyhnout (nesmí do nich narazit).

Vzhledem k neznámé poloze překážek je výhodné použít metodu, která při prohledávání stavového prostoru odhaduje cenu dosažení cíle z daného stavu. Proto využijeme algoritmu  $A^*$  [4], [2].

#### 4.1 Algoritmus $A^*$

Pro plánování implementujeme  $A^*$  algoritmus, který používá heuristickou funkci

$$\hat{f}(m) = \hat{g}(m) + \hat{h}(m), \quad (16)$$

kde  $\hat{g}(m)$  je odhad ceny nejkratší cesty z  $s_B$  (výchozí bod, popř. uzel, B) do  $m$  (aktuální uzel) a  $\hat{h}(m)$  je odhad ceny nejkratší cesty z  $m$  do  $s_E$  (koncový bod, popř. uzel, A). Tento algoritmus je přípustný [2], pokud cena každé cesty větší než  $\delta > 0$  a  $\hat{h}(m) \leq h(m)$ .

## 5 Experimenty

### 5.1 Přesnost měření

Pro ověření správnosti výpočtu matice  $H$  jsme využili referenčních bodů, u kterých jsou známy jak souřadnice v souřadné soustavě manipulátoru tak i v ss. kamery. Transformaci jsme provedli jak pro 4 body, které byly použity pro výpočet matice  $H$ , tak i pro kontrolní bod.

Bod	Souřadnice		Přepočtené souřadnice
	v ss. manipulátoru	v ss.kamery	kamera → manipulátor
Souřadnice použité pro výpočet			
1	[0, 0]	[187, 467]	[0, 0]
2	[383, 0]	[764, 295]	[383, 0]
3	[383, 277]	[549, 72]	[383, 277]
4	[0, 277]	[61, 174]	[0, 277]
Kontrolní bod			
5	[192, 138]	[403, 233]	[192, 138]

Tabulka 1: Tabulka znázorňující přesnost výpočtu souřadnic

Z tabulky 1 je vidět, že matice  $H$  byla vypočtena správně, neboť souřadnice přepočtené ze ss.kamery do ss. manipulátoru souhlasí s reálnými souřadnicemi.

### 5.2 Korektnost přímé a inverzní kinematické úlohy

Správnost výpočtu přímé a inverzní kinematické úlohy je možné ověřit výpočtem přímé kinematické úlohy při znalosti natočení kloubů  $[\alpha, \beta, \gamma]$ , čímž získáme polohu chapadla  $[x, y, z]$  v kartézských souřadnicích. Po aplikaci inverzní kinematické úlohy na tyto souřadnice pak získáme hodnoty natočení kloubů  $[\alpha', \beta', \gamma']$ . Pokud je výpočet korektní, hodnoty  $[\alpha, \beta, \gamma]$  a  $[\alpha', \beta', \gamma']$  by měly být shodné (v určité toleranci).

Kloubové souřadnice $[\alpha, \beta, \gamma]$	Bod v prostoru $[x, y, z]$	Kloubové souřadnice $[\alpha', \beta', \gamma']$
$[20^\circ, 60^\circ, -30^\circ]$	$[700, 323, 161]$	$[20^\circ, 60, 1^\circ, -30, 2^\circ]$

Tabulka 2: Tabulka znázorňující korektnost IKU a PKU

## 6 Závěr

Navrhli jsme řešení inženýrského problému, který se týkal všech důležitých oblastí kybernetiky, robotiky a umělé inteligence.

V první části jsme zpracovali obraz z neznámé perspektivní kamery a získali transformační matici pro přepočet souřadnic počátečního a koncového bodu do souřadnic manipulátoru. Správnost výsledné matice homografie (4) byla experimentálně ověřena v části 5.1.

V druhé části jsme povedli výpočet přímé a inverzní kinematické úlohy. Korektnost řešení jsme ověřili v části 5.2.

## Reference

- [1] Smutný, V. *Průsvitky předmětu Robotika*, **online**, 1.1.2002  
<http://cyber.felk.cvut.cz/robotika>
- [2] Pajdla, T. *Inteligentní robotika*, **online**, 1.1.2002  
<http://cyber.felk.cvut.cz/iro>
- [3] Krajník, E. *Maticový počet*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000.
- [4] Mařík V., Štěpánková O., Lažanský J. *Umělá inteligence (1)*. Praha: Academia, 1993.