PSZ Solution Pack

Tento dokument obsahuje oskenovaná řešená zadání starých zkoušek a podobných příkladů tak jak se mi je podařilo při přípravě shromáždit.

Enjoy !

Motto: PSZ je ta úplně nejzkurvenější věc jakou jsem na FELu zažil a tomu kdo ji vymyslel, tomu bych dal korunu !

Úvodní část

Obsahuje směrnice děkana k PSZ, požadavky a zadání starších zkoušek.

SMĚRNICE DĚKANA FEL PRO PRVNÍ SOUBORNOU ZKOUŠKU

Úvodní ustanovení

1. Souborná zkouška na ČVUT se řídí článkem 14 Studijního a zkušebního řádu pro studenty ČVUT.
2. První soubornou zkouškou (dále PSZ) na Fakultě elektrotechnické ČVUT se ověřuje, získal-li student komplexní vědomosti ze základního bloku studia.
3. PSZ se skládá z písemných zkoušek ve dvou blocích.
   První blok tvoří předměty: Matematika (M) a Fyzika (F).
   Druhý blok tvoří soubor Teoretická elektrotechnika (TE) a Výpočetní technika (VT)
   Pozn.: Teoretická elektrotechnika je název pro soubor předmětů Teorie obvodů, Teorie elektromagnetického pole, Elektrická měření.
4. PSZ je součástí základního bloku studia a musí být složena do čtyř školních let od posledního přijetí na FEL.
5. Do bakalářského bloku studia (3. ročníku) se může zapsat pouze student, který uspěl u PSZ. Podmíněně na dobu nejvýše dvou semestrů se může zapsat i student, který PSZ dosud nesložil a nevyčerpal časový limit čtyř let podle bodu 3.
6. Jestliže student nesloží do čtyř let od posledního zápisu na FEL PSZ, je mu studium ukončeno.

Podmínky vykonání PSZ

1. K PSZ se může student přihlásit po získání minimálně **120 kreditů** z předmětů **základní** etapy studia, má-li absolvovány všechny povinné a povinně volitelné předměty v předepsaném rozsahu a skladbě.
2. PSZ se může opakovat **pouze jedenkrát**, nejdříve však po uplynutí **dvou měsíců** od neúspěšné zkoušky a **nejpozději do jednoho roku od prvního pokusu**.
3. Neuspěje-li student v některém předmětu, nebo skupině předmětů jednoho bloku, musí opakovat celý blok.
4. Neuspěje-li student v některém předmětu, nebo skupině předmětů v obou blocích, musí opakovat PSZ jako celek.

Prominutí PSZ

1. PSZ bude prominuta, pokud má student vážený průměr z předepsaných předmětů základního bloku studia lepší nebo roven **2,00**. Předepsané předměty jsou:

M	- Matematika 1, 2, 3, 4
UA	- Úvod do algebry
F	- Fyzika 1, 2
VT	- Výpočetní technika a programování 1, 2
O	- Teorie obvodů 1, 2
P1	- Teorie elektromagnetického pole
EM	- Elektrická měření
UPS	- Úvod do počítačových systémů

Vážený průměr

a) Příspěvek předmětů Výpočetní technika a programování 1, 2 (resp. Teorie obvodů 1,2) se určí jako známka z VT2 (resp. O2) násobená součtem kreditů VT1 a VT2 (resp. O1 a O2).

b) Vzorec pro výpočet váženého průměru (VAPR):

$$\mathrm{VAPR} = \frac{\mathrm{Zn}_1.\mathrm{K}_1 + \mathrm{Zn}_2.\mathrm{K}_2 + \ldots + \mathrm{Zn}_n.\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \ldots + \mathrm{K}_n}$$

kde $\mathrm{Zn}_1, \ldots, \mathrm{Zn}_n$ jsou známky z jednotlivých předmětů,
$\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_n$ kredity jednotlivých předmětů.

c) Vážený průměr se uvádí na dvě desetinná místa.

PSZ nelze prominout, pokud nebyly všechny předepsané předměty použité k výpočtu váženého průměru složeny na FEL.

Organizace PSZ

1. Pro konání PSZ se vypisují v kalendářním (školním) roce čtyři termíny (duben, červenec, září, listopad).

   K vykonání PSZ se musí student přihlásit prostřednictvím informačního systému.
2. Příslušné katedry stanoví tématické celky, ze kterých budou písemné zkoušky sestaveny. Tématické celky se vypisují nejpozději začátkem letního semestru školního roku, ve kterém se PSZ koná. Katedry nejpozději v posledním týdnu výuky letního semestru zveřejní vzorové příklady s vyznačeným hodnocením.
3. PSZ probíhá ve **dvou** částech. V prvé části (doba trvání 150 minut) se řeší úlohy z jednoho bloku. Po přestávce (90 minut) následuje druhá část (doba trvání 150 minut), ve které se řeší úlohy zbývajícího bloku.
4. PSZ bude zajišťována pro všechny přihlášené studenty ve stejném termínu, dovolí-li to prostorová kapacita fakulty. Pokud nebude k dispozici dostatečná prostorová kapacita fakulty, bude PSZ organizována v jednom termínu vždy pro studenty jednoho bakalářského oboru.

Hodnocení PSZ

1. Výsledky jsou hodnoceny body. Maximální počet bodů v každém bloku je **50**.

První blok	M - 35, F - 15
Druhý blok	TE - 35, VT - 15

   Žádný z předmětů obou bloků nesmí být hodnocen méně než **5** body a celkově každý blok méně než **25** body, aby student u PSZ uspěl.

2. Pokud student ve zkoušce uspěl, bude konstatováno, že při PSZ uspěl a získal .... (počet) bodů ze **100** možných.
3. Při celkovém hodnocení souborné zkoušky se užívá klasifikační stupnice čl.15 odst.2 Studijního a zkušebního řádu pro studenty ČVUT v Praze.
4. Po úspěšném složení nebo prominutí PSZ bude tato skutečnost vyznačena studentovi ve výkazu o studiu (index).

Přechodná ustanovení

1. Tato směrnice byla projednána Akademickým senátem FEL dne 4.6.1999.
2. Pro studenty, kteří ukončili předmět O1 klasifikovaným zápočtem a předmět O2 zkouškou, se v příspěvku do váženého průměru započítávají obě známky.
3. Tato směrnice vstupuje v platnost dne 1.10.1999 a zároveň se tímto dnem ruší platnost předpisu pro soubornou zkoušku ze dne 3.1.1995.

Prof. Ing. Jan Uhlíř, Csc.,v.r.
děkan FEL

Diefrenciální rovnice.
Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu:
a) Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými
b) Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty.
a) Odhad tvaru partikulárního řešení u rovnic s kvazipolynomickou pravou stranou
b) Variace konstant
c) Řešení počáteční úlohy Laplaceovou transformací

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty
a) Řešení eliminací
b) Řešení metodou charakteristických hodnot
c) Řešení počáteční úlohy Laplaceovou transformací

Příklady zadávané při PSZ budou analogické příkladům ze skripta
Jankovský, Pechová, Průcha: MAII -úlohy. Kap.13, kap.14.
Dont, Opic: MA III - úlohy. Kap.XII.

Jankovský, Průcha: MI - úlohy. Kap. 15.

Fourierovy řady.
Rozvoj funkce do Fourierovy řady v a) trigonometrickém tvaru,
b) komplexním tvaru,
c) amplitudověfázovém tvaru.
Řešení diferenciální rovnice s periodickou pravou stranou pomocí Fourierovy řady.

Příklady zadávané při PSZ budou analogické příkladům uvedeným ve skriptu
Jankovský, Pechová, Průcha: MA II - úlohy. Kapitola 15.

Diferenciální počet funkcí dvou a tří proměnných.
Lokální extrémy funkcí dvou a tří proměnných.
Vázané extrémy s jednou vazební podmínkou.
Absolutní extrémy na množině.

Příklady zadávané při PSZ budou analogické příkladům ze skripta:
Jankovský, Průcha: Matematická analýza II - úlohy. Kap 10.

Komplexní funkce komplexní proměnné.
Počítání s komplexními čísly.
Výpočet hodnot komplexních funkcí jednoznačných i víceznačných.

Řešení rovnic v komplexním oboru. Holomorfní funkce

Příklady zadávané při PSZ budou analogické příkladům ze skripta:
Dont, Opic: Matematická analýza III. Úlohy. Kap.III. + IV.

Matematická statistika.
Výpočet pravděpodobností z rozdělení náhodné veličiny.
Funkce náhodných veličin a jejich číselné charakteristiky.
Náhodný vektor a jeho popis distribuční funkcí, hustotou.
Číselné charakteristiky náhodného vektoru.
Nezávislost náhodných veličin.

Příklady zadávané při PSZ budou analogické příkladům ze skripta:
Něničková: Matematická statistika - cvičení. Kap. 5, 6, 7.

<u>Příklad</u> : V oboru komplexních čísel řešte rovnici

$$e^{z^3} = j\ .$$

<u>Řešení</u> : Logaritmováním rovnice dostaneme

$$z^3 = \mathrm{Log}\, j = \ln 1 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in Z\ .$$

V exponenciálním tvaru

$$z^3 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2u\pi\right)} \qquad \text{pro} \quad k \geqq 0,\ u \in Z$$

$$z^3 = \left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right| e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + 2u\pi\right)} \quad \text{pro} \quad k < 0,\ u \in Z\ .$$

Odmocněním

$$z = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\ e^{j\frac{\pm\frac{\pi}{2} + 2u\pi}{3}}, \qquad u = 0, 1, 2$$

tj.

$$z_1 = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\ .\ (-j)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\ .\ j$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|}\ .\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right)$$

pro $k < 0$.

Celkem 5 bodů

Příklad : Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f : z = xy \ln(x^2 + y^2) .$$

Řešení : Definiční obor $D(f) = R^2 - \{0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

tj. $x(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + 2xy^2 = 0 \;/\; . \; y \neq 0$

$y(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + 2x^2y = 0 \;/\; . \; x \neq 0$, odečteme.

Dostaneme $2y^2 = 2x^2$, tj. $y = \pm x$ a $x \,.\, (\ln 2x^2 + 1) = 0$, protože $x \neq 0$, je $x^2 = \frac{1}{2e}$.

Stacionární body parciálních derivací jsou

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) .$$

Další stacionární body dostaneme pro $y = 0$ je $\ln x^2 = 0$ a pro $x = 0$ je $\ln y^2 = 0$, tj.

$$(1, 0), (-1, 0) \text{ a } (0, 1), (0, -1) .$$

Dále rozhodneme Silvestrovým kriteriem.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x^3y + 6xy^3}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy^3 + 6x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^4 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} .$$

Pro body $\left(+\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ je matice $d^2 f$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 2 \end{vmatrix},$$

tj. $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = 4$ a $d^2 f$ je pozitivně definitní

Funkce f v těchto bodech nabývá ostrého lokálního minima.

V bodech $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ je matice $d^2 f$ rovna

$\begin{vmatrix} -2, & 0 \\ 0, & -2 \end{vmatrix}$, tj. $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = -2, \Delta_2 = 4$ a $d^2 f$ je negativně definitní. Funkce f v těchto bodech nabývá ostrého lokálního maxima.

V bodech $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$ je matice $d^2 f$ rovna

$\begin{vmatrix} 0, & 2 \\ 2, & 0 \end{vmatrix}$, tj. $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -4$. Matice $d^2 f$ není definitní a funkce f v těchto bodech nenabývá lokálních extrémů.

Celkem 10 bodů

__Příklad__ : Stanovte vázané extrémy funkce

$$f : z = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$$

pro $G : x^2 + y^2 = 1$.

__Řešení__ : Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y; \lambda) = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \lambda(x^2 + y^2 - 1) .$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{3} - 2\lambda x = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{4} - 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Pro $x = \frac{1}{6\lambda}$, $y = \frac{1}{8\lambda}$ dostaneme $576\lambda^2 = 25$. Tedy $\lambda = \pm \frac{5}{24}$.

Stacionární body pro $\lambda = \pm \frac{5}{24}$ jsou $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Restrikce d^2L na tečný podprostor

$$\tau = \left\{(h_1, h_2), \frac{\partial G}{\partial x}h_1 + \frac{\partial G}{\partial y}h_2 = 0\right\} = \left\{(h_1, h_2), 2xh_1 + 2yh_2 = 0\right\}$$

není nutná, neboť

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} h_2^2 = -2\lambda h_1^2 - 2\lambda h_2^2 \quad \text{a}$$

$$d^2L\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}; \frac{5}{24}\right) = -\frac{10}{24}(h_1^2 + h_2^2) < 0$$

$$d^2L\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}; -\frac{5}{24}\right) = \frac{10}{24}(h_1^2 + h_2^2) > 0 \quad \text{pro } (h_1, h_2) \neq (0, 0).$$

Tedy v bodě $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ je lokální ~~minimum~~ maximum $f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{12}$

a v bodě $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ je lokální minimum $f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{12}$.

Celkem 10 bodů.

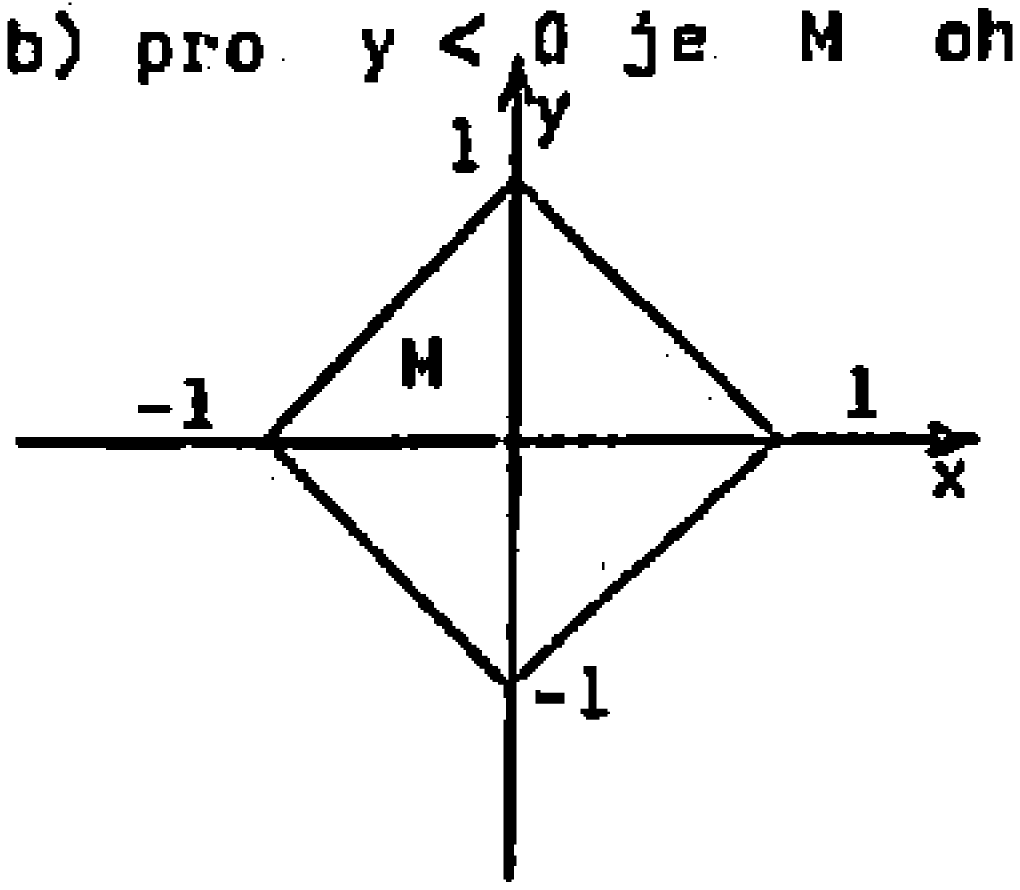
Příklad : Nalezněte největší hodnotu a nejmenší hodnotu funkce

$$f : z = x^2 - xy + y^2$$

na množině $M = \{(x, y);\ |x| + |y| \leq 1\}$.

Řešení : a) Pro $y \geq 0$ je M ohraničena grafem funkce $y = 1 - |x|$,

b) pro $y < 0$ je M ohraničena grafem funkce $y = |x| - 1$. Tedy



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 \quad \text{a} \quad f(0, 0) = 0 \text{ je}$$

jediným stacionárním bodem uvnitř M .

Jest $f(0, 0) = 0$.

Vyšetříme hranici M .

Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a je $y = 1 - x$ je $f(x, 1-x) = 3x^2 - 3x + 1$;

$f'(x, 1-x) = 6x - 3 = 0$. Tedy $x = \frac{1}{2}$ a $y = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $y = x - 1$ je $f(x, x-1) = x^2 - x + 1$;

$f'(x, x-1) = 2x - 1 = 0$. Tedy $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ a $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$ a $y = x+1$ je $f(x, x+1) = x^2 + x + 1$; $f'(x, x+1) = 2x + 1 = 0$.

Tedy $x = -\frac{1}{2}$ a $y = \frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$ a $y = -x - 1$ je $f(x, -x-1) = 3x^2 + 3x + 1$;

$f'(x, -x-1) = 6x + 3 = 0$. Tedy $x = -\frac{1}{2}$ a $y = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Dále je $f(1, 0) = f(0, 1) = f(-1, 0) = f(0, -1) = 1$

a $\max\limits_{(x,y) \in M} f(x,y) = \max\{f(0, 0), f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ldots, f(1, 0), \ldots\} = 1$. (body [0, 1], [1, 0], [-1, 0] a [0, -1])

$\min\limits_{(x,y) \in M} f(x,y) = \min\{f(0, 0), f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ldots, f(0,-1)\} = 0$. (bod [0; 0])

Celkem 10 bodů

Mechanika	Rychlost a zrychlení. Tečné a normálové zrychlení. Pohyb na kružnici. Pohyb v homogenním tíhovém poli. Newtonovy pohybové zákony. Práce. Energie kinetická a potenciální. Moment síly a moment hybnosti. Zákony zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti. Moment setrvačnosti, Steinerova věta. Kinetická energie tuhého tělesa. Pohybová rovnice pro otáčivý pohyb tělesa. Matematické kyvadlo.
Termika	Stavová rovnice dokonalého plynu. Vnitřní energie plynu. Ekvipartiční teorém. Závislost efektivní a střední rychlosti na teplotě. Teplo a práce. První věta termodynamická. Rovnice adiabaty. Účinnost Carnotova cyklu. Entropie a její změny. Druhá věta termodynamická.
Fyzikální pole	Newtonův gravitační zákon. Coulombův zákon. Intenzita a potenciál elektr.pole bodového náboje, dipólu, nabité koule a válce. Vodič a dielektrikum v dielektrickém poli. Kapacita. Energie a hustota energie elektrického pole. Proudová hustota, rovnice kontinuity. Ohmův zákon. Jouleův zákon. Silové účinky magnetického pole na náboj. Biotův-Savartův-Laplaceův zákon - magnetické pole přímého vodiče a kruhové smyčky. Magnetický indukční tok. Magnetické pole v látkovém prostředí. Zákon elektromagnetické indukce. Vlastní a vzájemná indukčnost. Energie a hustota energie magnetického pole. Maxwellovy rovnice v integrálním a diferenciálním tvaru.
Kmity	Netlumený harmonický oscilátor a jeho energie. Tlumený oscilátor. Vynucené kmity. Rezonance. Skládání harmonických kmitů.
Vlny	Postupné a stojaté vlny. Vlnová rovnice. Závislost amplitudy a intenzity kulové vlny na vzdálenosti. Superpozice vln. Polarizace vln. Odraz a lom na rozhraní dvou prostředí. Intenzita vlnění. Dopplerův jev.
Elektromagnetické vlny	Základní vlastnosti volných elektromagnetických vln. Interference na tenké vrstvě. Difrakce na štěrbině a mřížce. Vztah mezi osvětlením a svítivostí.
Úvod do relativity	Kontrakce délek, dilatace času. Závislost hmotnosti na rychlosti. Celková, klidová a kinetická energie. Skládání rychlosti.
Úvod do kvantové fyziky	Foton, fotoefekt. Comptonův jev. Stefanův-Boltzmannův zákon. Bohrův model atomu vodíku - kvantové hodnoty energie elektronů, frekvence vyzařovaných čar. Vlnové vlastnosti částic - frekvence a vlnová délka. Schrödingerova rovnice. Částice v potenciálové jámě. Kvantová čísla n, l, m a m_s a jejich význam.
Zákl.fyziky atom.jádra	Radioaktivita, rozpadový zákon. Vazbová energie jader. Princip štěpení a slučování jader.

Doporučená literatura: P.Kubeš,Z.Kyncl:Fyzika I.,J.Jelen,J.Lego: Fyzika II., V.Šanderová, J.Kracík: Fyzika., J.Krupka, L.Kalivoda: Fyzika., S.Pekárek, M.Murla: Fyzika I - semináře., J.Kravárik, P.Kubeš: Fyzikální cvičení II

Při přípravě doporučujeme prostudování násl.příkl.: Fyzika I- semináře př.č.15, 25, 64, 69, 85, 97, 184, 200, 204, 207, 231, 253, 257, 278, 283, 285, 295, 307, 308, 309. Fyz.cvič.II - 7, 23, 27, 30, 38, 53, 69, 80, 129, 147, 182, 183, 199, 214, 222, 223, 240, 252, 253, 273.

PSZ - fyzika

1

Z místa v dané výšce nad povrchem Země bylo vypuštěno těleso o hmotnosti m. Určete rychlost pohybu tělesa jako funkci času, pokud

a) odpor vzduchu je možné zanedbat, 4 body

nebo

b) odpor vzduchu je možné počítat jako sílu přímo úměrnou rychlosti pohybu tělesa ($F_t = k \cdot v$). 4 body

Tíhové zrychlení g v obou případech považujte za konstantu.

Řešaní: a) $v = gt$

b) $m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - kv \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dy}{dt} = g$

$\frac{dy}{dt} = v \; ; \; \frac{k}{m} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \alpha v = g$

$v = \frac{g}{\alpha} + A e^{-\alpha t}$

$t = 0 \; ; \; v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha t}\right] = \frac{mg}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$

$A = -\frac{g}{\alpha}$

2

Na rovinný, opticky dokonale vyleštěný povrch silné skleněné desky dopadá ze vzduchu paprsek světla o vlnové délce $\lambda = 550$ nm. Úhel dopadu paprsku, měřený od kolmice v místě dopadu, je roven $\alpha = 55{,}4°$. Tento paprsek se po dopadu dílem odráží, dílem láme. Podrobnějším měřením bylo zjištěno, že odražený a lomený paprsek jsou přitom na sebe kolmé.

a) Určete index lomu materiálu desky. (Index lomu pro vzduch pokládejte za rovný jedné.) 4 body

b) Jakou význačnou vlastnost má paprsek odražený od povrchu desky v daném uspořádání? 3 body

Řešaní: a) $\beta = 90° - 55{,}4° = 34{,}6° \qquad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}45$

[nebo $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = 1{,}45$

b) Odražaný paprsak je úpluě lineáruě polarizován (Brewsterův zákon)

Požadované znalosti budou ověřeny kombinovanými příklady obsahujícími problematiku z **Teorie obvodů, Teorie elektromagnetického pole a Elektrických měření.**

Části příkladů využívajících znalosti z **Teorie obvodů** budou obdobného typu jako řešené i neřešené úlohy v odpovídajících kapitolách literatury (3) a (4).

Části příkladů využívajících znalostí z **Teorie elektromagnetického pole** budou obdobného typu jako řešené i neřešené úlohy v odpovídajících kapitolách literatury (5), (6), (7).

Části příkladů využívajících znalostí z **Elektrických měření**, budou obdobného typu jako řešené i neřešené úlohy v odpovídajících kapitolách literatury (8) a (9).

Obvodové veličiny

Definice napětí a proud, typy časových průběhů a jejich matematické vyjádření, střední a efektivní hodnota periodických průběhů. Výkon elektrického proudu. Zobrazení obvodových veličin pro různé typy časových průběhů (fázory, Fourierovy řady, Fourierova a Laplaceova transformace).

Prvky elektrických obvodů

Základní aktivní dvojpóly (zdroj napětí, zdroj proudu). Základní pasivní dvojpóly (rezistor, kapacitor, induktor). Vztahy mezi jejich napětím a proudem pro obecné časové průběhy a pro stacionární a harmonický ustálený stav, operátorové vyjádření těchto vztahů (i pro nenulové počáteční podmínky). Základní vícepólové prvky (vázané induktory, řízené zdroje). Charakteristiky neautonomních dvojbranů a n-pólů.

Obvodové rovnice

Kirchhoffovy zákony, nezávislé obvodové rovnice, metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí, zobecněná metoda uzlových napětí.

Analýza lineárních obvodů v ustálených stavech

Elementární obvodová analýza. Imitance, pravidla pro řazení dvojpólů. Věty o náhradních zdrojích. Princip superpozice. Rezonance. Činný, jalový, zdánlivý a deformační výkon. Elementární analýza jednoduchých trojfázových obvodů.

Řešení obvodových rovnic pro stacionární, harmonický a periodický neharmonický ustálený stav.

Obvodové funkce (imitance a přenosy). Kmitočtové charakteristiky obvodových funkcí.

Analýza přechodných jevů v lineárních obvodech

Obvodové rovnice pro přechodné jevy. Obecné a partikulární řešení, počáteční podmínky, integrační konstanty. Základní přechodné jevy 1. a 2. řádu.

Operátorové rovnice pro přechodné jevy a jejich řešení. Operátorové obvodové funkce. Impulsní a přechodová charakteristika (definice, vlastnosti a použití).

Literatura

(1)	Mikulec M.:	Teorie obvodů - přednášky
(2)	Mikulec M., Havlíček V.:	Teorie obvodů - přednášky (doplňkové skriptum)
(3)	Havlíček V., Zemánek I.:	Teorie obvodů I - cvičení
(4)	Havlíček V.:	Teorie obvodů II - cvičení

Tématické okruhy pro první soubornou zkoušku z předmětu

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

část týkající se ELEKTRICKÝCH MĚŘENÍ

1. **Měření efektivních hodnot napětí a proudu, měření činného a jalového výkonu** (včetně výpočtu z ovzorkovaných průběhů) - použitelné přístroje a jejich zapojení do obvodu (jednofázová i třífázová síť), měření kmitočtu a fázového rozdílu

2. Elektronické měřicí přístroje, A/D a D/A převodníky

2.1. AD převodníky - schéma vyjadřující princip činnosti, základní vlastnosti jednotlivých typů

2.2. DA převodníky - schéma vyjadřující princip činnosti, základní vlastnosti a vztah pro výstupní napětí

2.3. Laboratorní analogový osciloskop - blokové schéma jednotlivých typů, princip činnosti (jednokanálový i vícekanálový, 2 časové základny)

2.4. Osciloskop s číslicovou pamětí a číslicová paměť dynamických dějů (Transient Memory) - blokové schéma, režimy ukládání do paměti a zobrazení, stroboskopické vzorkování

2.5. Čítač - blokové schéma, princip měření f a T, čísl. fázoměr

2.6. Blokové schéma elektronického wattmetru

3. Měřicí zesilovače a převodníky, vypočet chyb měření

3.1. Měřicí zesilovače ($U \rightarrow U$, $I \rightarrow U$, $U \rightarrow I$, $I \rightarrow I$)

3.2. Měřicí převodníky - operační usměrňovač, $U_{ef} \rightarrow U_{ss}$, $R \rightarrow U$, $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$, $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{U}$ (měření R, L, C)

3.3. Chyby vznikající nedokonalostí OZ (vstupní klidový proud, vstupní napěťová nesymetrie)

3.4. Výpočet chyby údaje ručkových i číslicových přístrojů

3.5. Výpočet max. možné chyby při nepřímých měření

Literatura:

[7] Haasz, V., Sedláček, M.: Elektrická měření - Přístroje a metody, Vydavatelství ČVUT, Praha 1998

[8] Sedláček, M., Haasz, V.: Electrical Measurements and Instrumentation, Vydavatelství ČVUT, Praha 1995

Základní veličiny elektromagnetického pole

Definice intenzity elektrického pole, elektrické indukce a jejich vzájemný vztah.
Definice intenzity magnetického pole, magnetické indukce a jejich vzájemný vztah.
Maxwellovy rovnice pro obecné časové průběhy a jejich úprava pro harmonický časový průběh budících veličin.

Statické a stacionární pole

Elektrostatické a elektrické pole

Výpočet intenzity a potenciálu elektrického pole. Řešení elektrostatického a elektrického proudového pole kulových, válcových a rovinných elektrod. Podmínky na rozhraní mezi dielektriky s různou permitivitou. Podmínky na rozhraní dvou prostředí s různými měrnými vodivostmi. Výpočet kapacity daného uspořádání elektřod. Výpočet odporu daného uspořádání elektrod.

Magnetické pole

Výpočet intenzity a potenciálů magnetického pole. Řešení magnetického pole liniových vodičů, toroidní a válcové cívky. Podmínky na rozhraní dvou prostředí s různými permeabilitami. Výpočet indukčností a vzájemných indukčností daného uspořádání vodičů, cívek, resp. jejich kombinací. Řešení magnetických obvodů. Výpočet indukčností cívek na feromagnetickém jádru.

Nestacionární elektromagnetické pole

Řešení pole rovinné harmonické vlny v neohraničeném prostředí nevodivém, ztrátovém a dobře vodivém. Výpočet složek intenzity elektrického a magnetického pole, konstanty šíření, měrného útlumu, hloubky vniku, fázové konstanty, fázové a skupinové rychlosti, impedance prostředí. Definice Poyntingova vektoru, jeho střední hodnoty v harmonickém poli šířícím se v prostředí nevodivém, ztrátovém a dobře vodivém.

Literatura:

(5) Fiksa, J.: Teorie elektromagnetického pole 1991
Coufalová, B., Havlíček, V., Mikulec, M., Novotný, K.: Teorie elektromagnetického pole I 1996
Teorie e. mag. pole

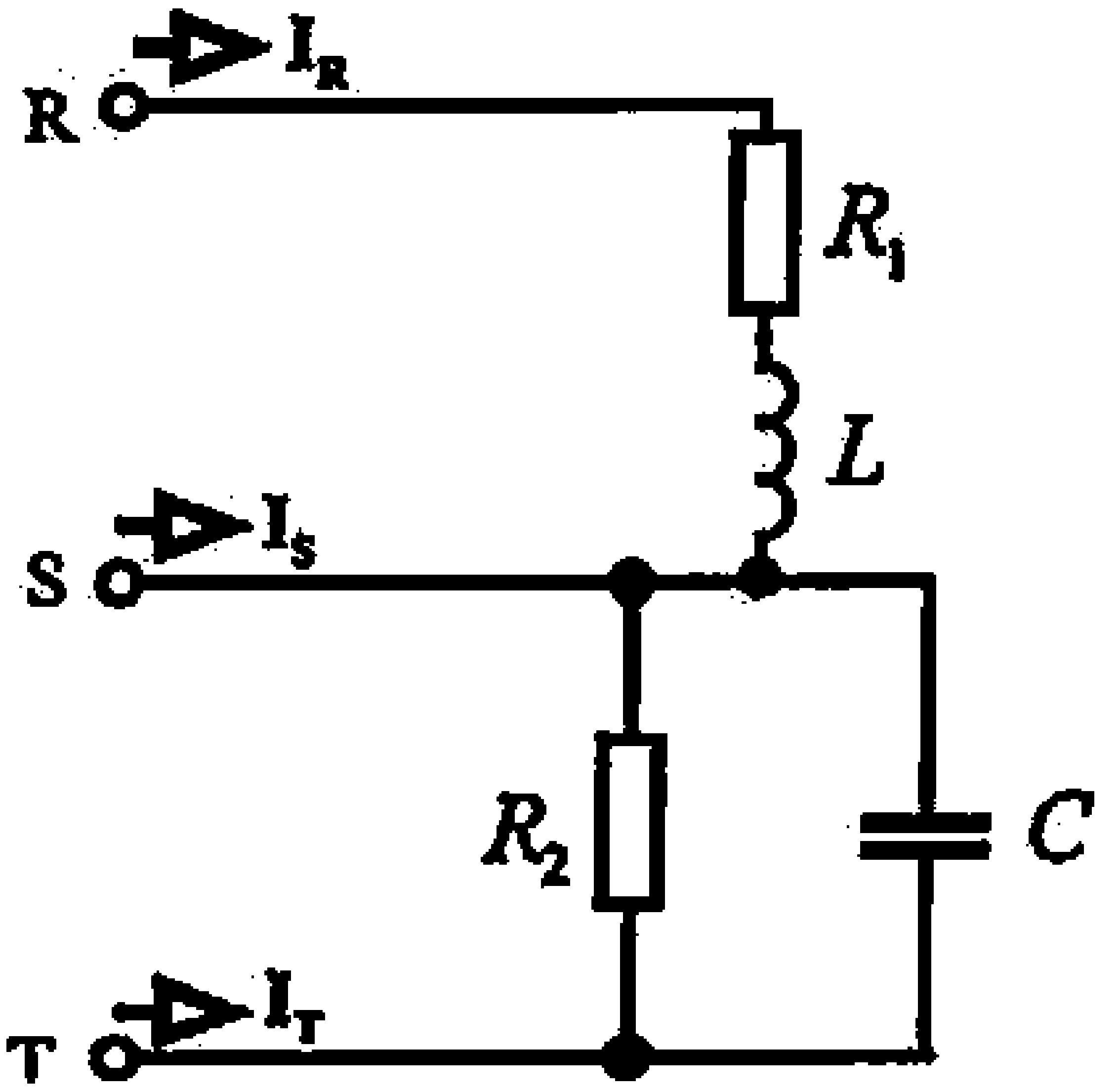
PŘÍKLAD Č. 1 **celkem 11 bodů**

Obvod podle obr. a) je napájen z trojfázového zdroje, jehož fázory sdružených napětí v měřítku efektivních hodnot jsou

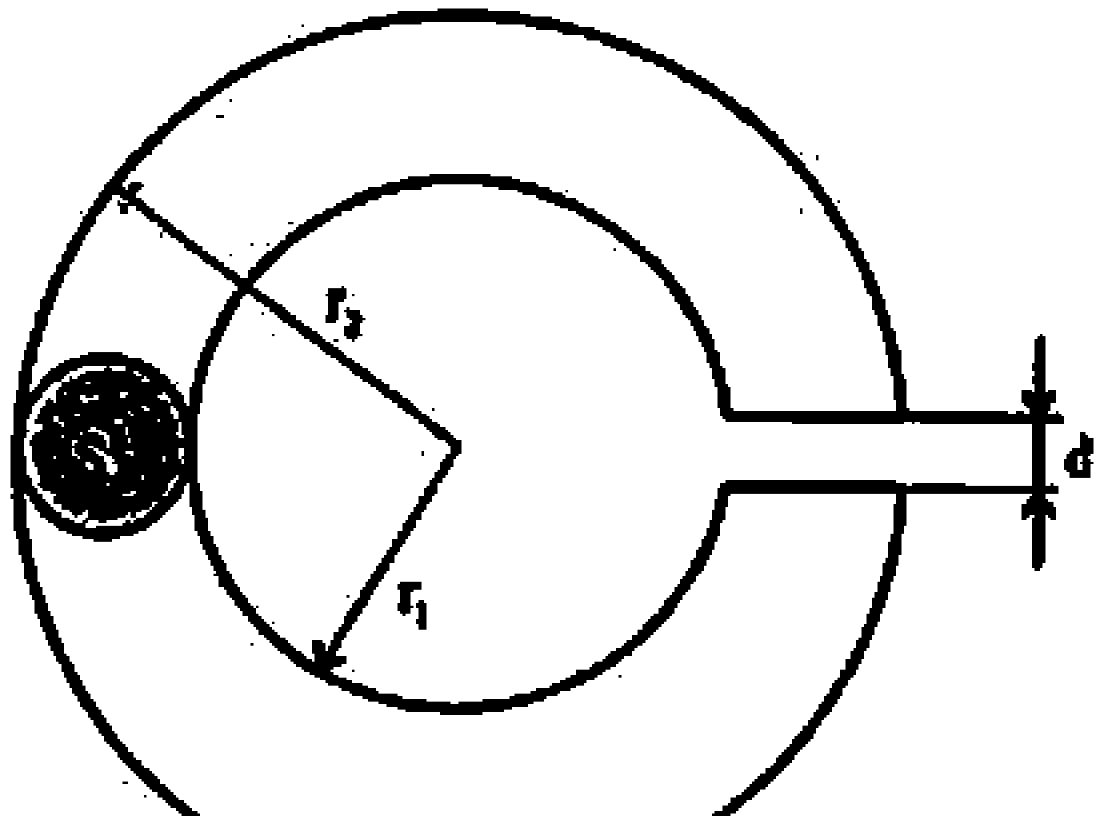
$$\mathbf{U}_{RS} = 380 \text{ V} ; \quad \mathbf{U}_{ST} = 380\, e^{-j2\pi/3} \text{ V} ; \quad \mathbf{U}_{TR} = 380\, e^{j2\pi/3} \text{ V}$$

Parametry obvodu jsou $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $C = 50\,\mu\text{F}$, $L = 0{,}5$ H, $f = 50$ Hz.

1. Vypočtěte fázor proudu $\mathbf{I}_R$ a jeho časový průběh v harmonickém ustáleném stavu.
2. Určete celkový jalový výkon obvodu, nakreslete zapojení pro jeho měření a uveďte vztah pro jeho stanovení z údajů jednotlivých přístrojů.
3. Induktor je realizován cívkou na toroidním jádře kruhového průřezu podle obr. b) z feromagnetického materiálu s relativní permeabilitou $\mu_r = 2000$ se vzduchovou mezerou délky $d = 0{,}2$ mm. Rozměry jádra jsou $r_1 = 80$ mm, $r_2 = 100$ mm. Vypočtěte potřebný počet závitů pro dosažení indukčnosti $L = 0{,}5$ H.



obr. a)



obr. b)

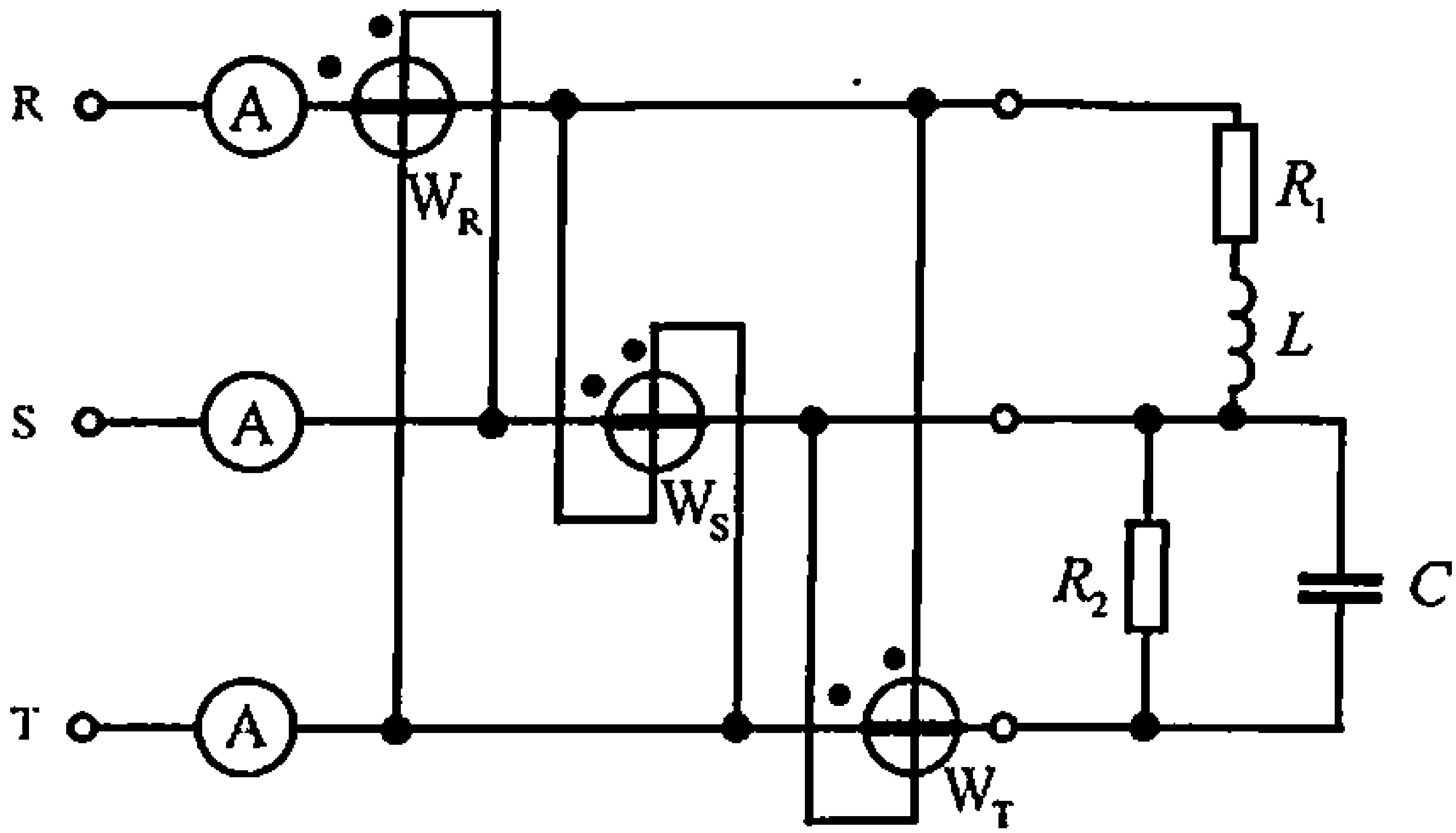
Řešení:

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{U}_{RS}}{R_1 + j\omega L} = 2{,}041\, e^{-j1{,}004} \quad [\text{A}]$$ 1 bod

$$i_R(t) = \sqrt{2}\, \text{Im}\{\mathbf{I}_R\, e^{j\omega t}\} = 2{,}886 \sin(314{,}16\, t - 1{,}004) \quad [\text{A}]$$ 1 bod

$$Q = \omega L I_R^2 - \omega C U_{ST}^2 = -1614 \text{ var}$$ 2 body

Zapojení pro měření jalového výkonu



obr. c) 2 body

$$Q = (W_R + W_S + W_T) / \sqrt{3}$$ 1 bod

$u_m = N \cdot I$

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N F_m / R_m}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$

$$R_m = R_{mFe} + R_{mvzd} = \frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 S} + \frac{l_{vzd}}{\mu_0 S}$$ 2 body

$$l_{vzd} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m},\ l_{Fe} = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} - l_{vzd} = 0{,}5653\ \text{m}$$

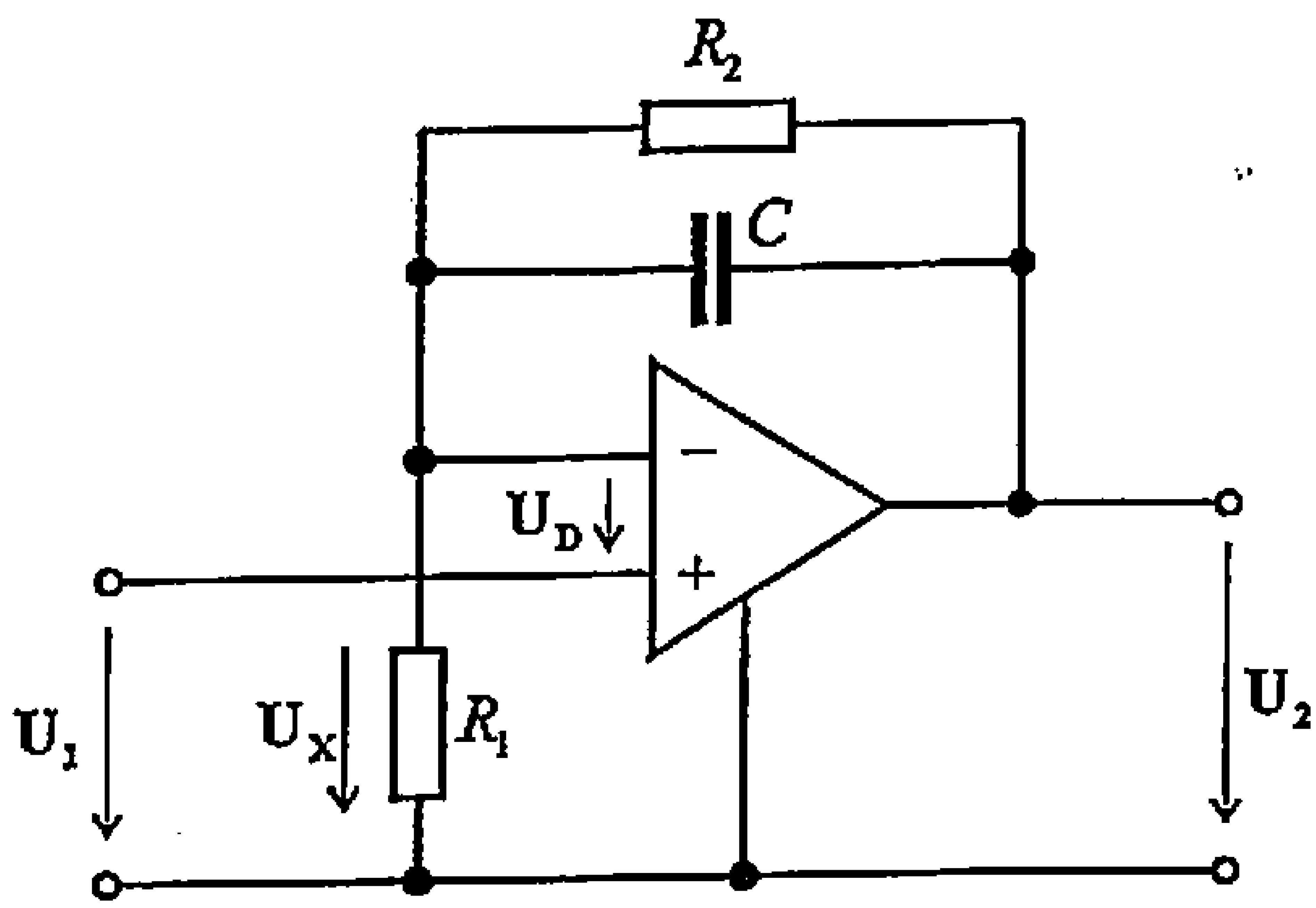
$$S = \frac{\pi (r_2 - r_1)^2}{4} = 3{,}1416 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$R_m = (0{,}71596 + 0{,}50661) \cdot 10^6 = 1{,}2227 \cdot 10^6\ \text{H}^{-1}$$

$$N = \sqrt{L R_m} = 782\ \text{záv.}$$ 2 body

PŘÍKLAD Č. 2 celkem 7 bodů

Měřicí zesilovač zapojený podle obrázku a) je tvořen ideálním operačním zesilovačem a rezistory $R_1 = 10,101\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 1\ \mathrm{M\Omega}$. Paralelně k rezistoru R_2 je připojena parazitní kapacita $C = 31,83\ \mathrm{pF}$. Určete přenos $P(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ daného zapojení a nakreslete jeho asymptotickou modulovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Určete modulovou a fázovou chybu přenosu oproti ideálnímu zesilovači se zesílením $K = 100$ na kmitočtu $f_a = 5\ \mathrm{kHz}$. Tento zesilovač je použit pro měření stejnosměrného napětí $U_{10} = 0,05\ \mathrm{V}$ pomocí AD převodníku s rozsahem $U_R = 10\ \mathrm{V}$ připojeného na výstup zesilovače. Určete chybu měření vstupního napětí, je-li chyba použitých rezistorů menší než 0,1 % a chyba použitého AD převodníku je 0,05% z údaje + 0,02% z rozsahu.



obr. a)

Řešení:

$$U_x = U_2 \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2}{1+j\omega C R_2}} = \frac{R_1(1 + j\omega C R_2)}{(R_1 + R_2)\left(1 + j\omega C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}$$

$$U_d \to 0 \quad \Rightarrow \quad U_x = U_1$$

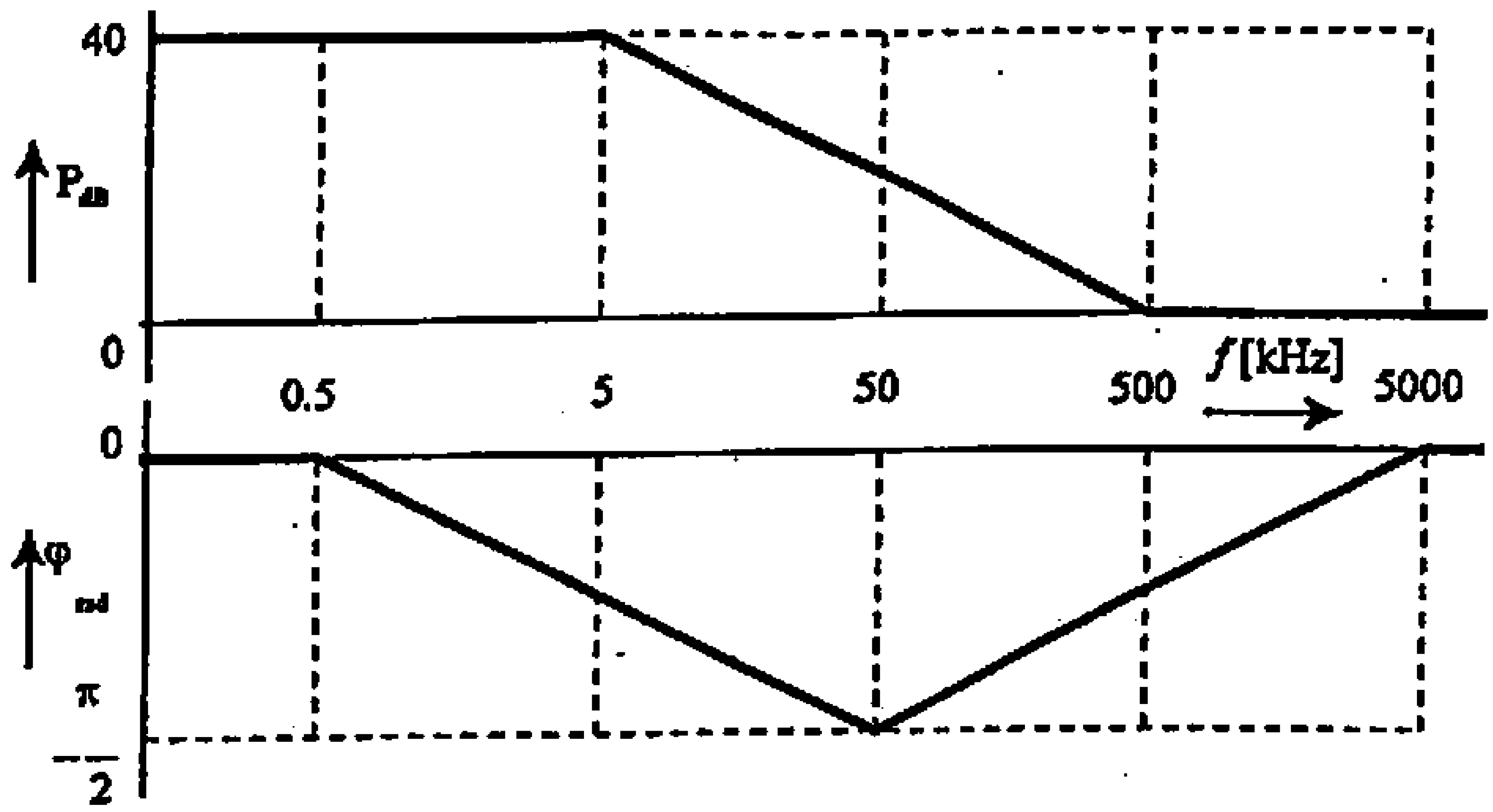
$$P(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1 + j\omega C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega C R_2} = 100 \frac{1 + j\omega\, 31,83 \cdot 10^{-8}}{1 + j\,\omega\, 31,83 \cdot 10^{-6}} \quad \text{2 body}$$

Kmitočtové charakteristiky odpovídající vypočtenému přenosu jsou uvedeny na obr. b). Úhlové kmitočty lomů modulové charakteristiky jsou v tomto případě:

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = 3,142 \cdot 10^6\ \mathrm{s^{-1}}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = 3,142 \cdot 10^4\ \mathrm{s^{-1}},$$

jimž odpovídají kmitočty

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 500\ \mathrm{kHz}, \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 5\ \mathrm{kHz}$$



2 body

obr. b)

Pro kmitočet $f_a = 5$ kHz platí přibližně

$$P(j\omega) \cong \frac{100}{1+j} \cong 70{,}7\, e^{-j\frac{\pi}{4}} = P_a\, e^{j\varphi_a}$$

$$\delta_a = \frac{P_a - K}{K} \cdot 100\% = -29{,}3\,\%\,, \qquad \delta_\varphi = \varphi_a = -\frac{\pi}{4}$$ 1 bod

Pro stejnosměrné měření ($\omega \to 0$) platí: $P = K = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 100$

Chyba přenosu vlivem chyby odporů je tedy:

$$|\Delta K| \le \left|\frac{\partial K}{\partial R_1}\Delta R_1\right| + \left|\frac{\partial K}{\partial R_2}\Delta R_2\right| = \frac{R_2}{R_1^2}\Delta R_1 + \frac{1}{R_1}\Delta R_2 = \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}\right)$$

a tedy

$$|\Delta K| \le \frac{R_2}{R_1}(\delta_{R_1} + \delta_{R_2}) = 100 \cdot 0{,}002 = 0{,}2\,,\ \ \delta_K = \frac{\Delta K}{K} \le 0{,}2\,\%$$

(lze využít i pravidel pro počítání s chybami)

Pro vstupní napětí $U_{10} = 0{,}05$ V je jmenovité výstupní napětí $U_{20} = K\,U_{10} = 5$ V.

Maximální možná chyba vstupního napětí je tedy

$$\delta U_{10} = \delta_K + \delta_{U_{20}} = \delta_K + \frac{\Delta U_{20}}{U_{20}}\,.$$

$$\Delta U_{20} \le 0{,}05 \cdot 10^{-2} \cdot U_{20} + 0{,}02 \cdot 10^{-2} \cdot U_R = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}, \qquad \delta_{U_{20}} \le 0{,}09\,\%$$

Celková největší možná relativní chyba měření napětí U_{10} je tedy

$$\delta U_{10} = \delta_K + \delta_{U_{20}} = (0{,}2 + 0{,}09)\,\% = 0{,}29\,\%$$ 2 body

PŘÍKLAD Č. 3 **celkem 11 bodů**

Lineární dvojbran podle obr.a) je zapojen v měřicím řetězci pro automatizovaný záznam přechodného děje podle obr.b). Vypočtěte časový průběh výstupního napětí dvojbranu $u_2(t)$, jestliže budicí D/A převodník generuje na vstupu dvojbranu v čase $t_0=0$ napěťový skok z hodnoty $u_{11}= 5V$ na hodnotu $u_{12} = 10V$, t.j. $u_1(t) = 5 + 5 \cdot 1(t)$. Parametry prvků dvojbranu jsou: $R = 50\Omega$, $L = 0{,}5$ H, $C = 100\mu F$. Předpokládejte, že výstupní odpor D/A převodníku je roven nule, vstupní odpor vzorkovače je nekonečný.

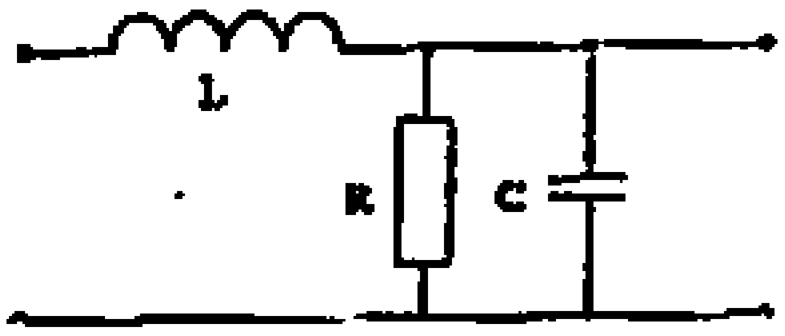
Další část zadání může mít např. tyto dvě varianty:

<u>Varianta 1:</u>

Jaký typ A/D převodníku použijete, máte-li vzorkovat s rozlišovací schopností 12 bitů alespoň 500 vzorků od počátku přechodového děje do okamžiku, kdy odchylka od ustáleného stavu bude přibližně 5%. Nakreslete blokové schéma vysvětlující princip použitého převodníku.

<u>Varianta 2:</u>

Pro buzení je použit 4-bitový D/A převodník s váhovou odporovou sítí. Nakreslete jeho principielní schéma a určete, jak mají být přepnuty elektronické přepínače pro napětí $u_{11}=5V$; $u_{12}=10V$ (binárnímu kódu N = 1111 na vstupu převodníku odpovídá výstupní napětí 15V).



obr. a)

obr. b)

<u>Řešení:</u>

Obvodová rovnice pro t > 0

$$\frac{1}{L}\int_0^t (u_2 - u_1)\,d\tau + i_L(0_+) + \frac{u_2}{R} + C\frac{du_2}{dt} = 0$$

po úpravě

$$LC\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 \qquad resp. \quad 5\cdot 10^{-5}\frac{d^2u_2}{dt^2} + 10^{-2}\frac{du_2}{dt} + u_2 = 10$$

2 body

Charakteristická rovnice má kořeny $\lambda_{1,2} = -100 \pm 100j$, takže řešení diferenciální rovnice lze psát ve tvaru:

$$u_2(t) = K e^{-100t}\sin(100t + \varphi) + u_{2p} \quad , \quad kde \quad u_{2p} = u_2(\infty) = 10\text{ V}$$ 2 body

Energetické počáteční podmínky jsou

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_{11} = 5\text{ V} \quad , \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{u_{11}}{R} = 0{,}1\text{ A}$$ 1 bod

Z rovnic

$$u_2(0_+) = u_C(0_+) \quad a \qquad -i_L(0_+) + \frac{u_2(0_+)}{R} + C\frac{du_2}{dt}\Big|_{t=0_+} = 0$$

plyne

$$u_2(0_+) = 5\ \text{V} \qquad u_2'(0_+) = 0\ \text{V/s}$$

a tedy

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad K = 5\sqrt{2} \equiv 7{,}071\ \text{V}$$

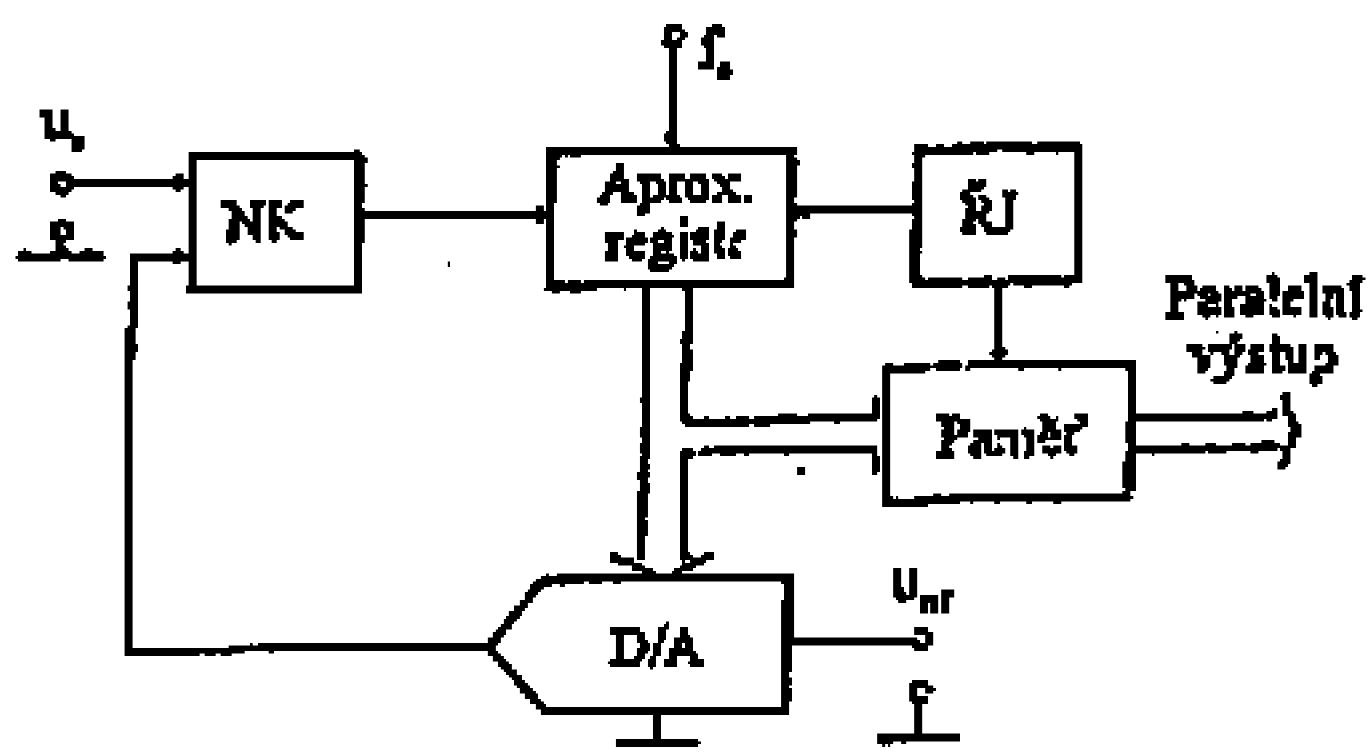
Hledaný časový průběh výstupního napětí dvojbranu pro $t > 0$ je tedy

$$u_2(t) = 7{,}071\ e^{-100t} \sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) + 10 \quad [\text{V}]$$ 2 body

Varianta 1:

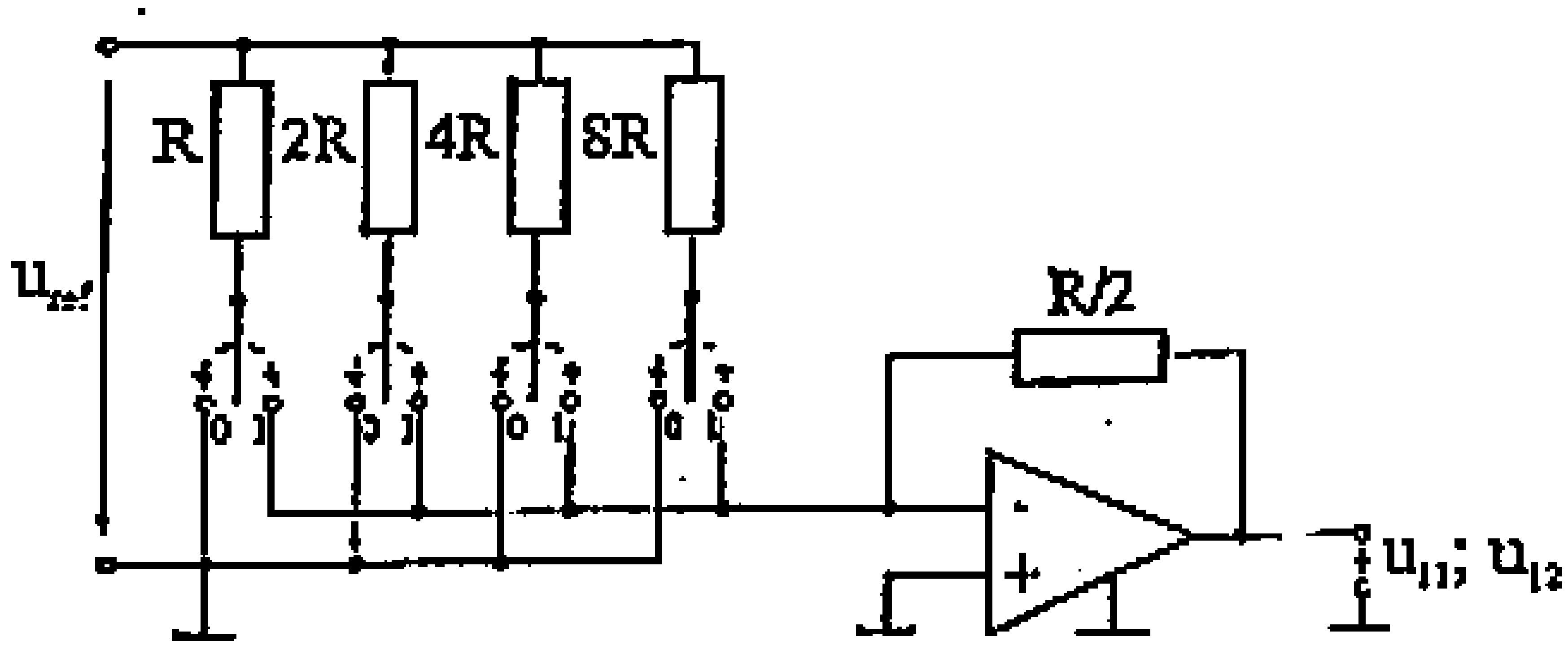
Doba trvání přechodného děje trvá od okamžiku napěťového skoku na vstupu dvojbranu do okamžiku, kdy odchylka od ustáleného stavu bude přibližně 5%, t.j. do doby splnění nerovnosti $7{,}071\ e^{-100t} \le 10 \cdot 0{,}05$. Odtud plyne $t \ge \frac{1}{100} \ln \frac{7{,}071}{0{,}5} = 0{,}0265$ s . Pokud pro $\Delta t = 26{,}5$ ms požadujeme $N \ge 500$ vzorků bude perioda vzorkování $T_v = \frac{\Delta t}{N} \le 53\ \mu\text{s}$ a vzorkovací frekvence $f_v = 1/T_v \ge 18{,}9$ kHz. Při požadavku rozlišovací schopnosti 12 bitů je v tomto případě nejvhodnější použít převodník s postupnou aproximací dle obr. c).

2 body



obr. c) 2 body

Varianta 2:



obr. d) 2 body

$U_{ref} = 16$V.

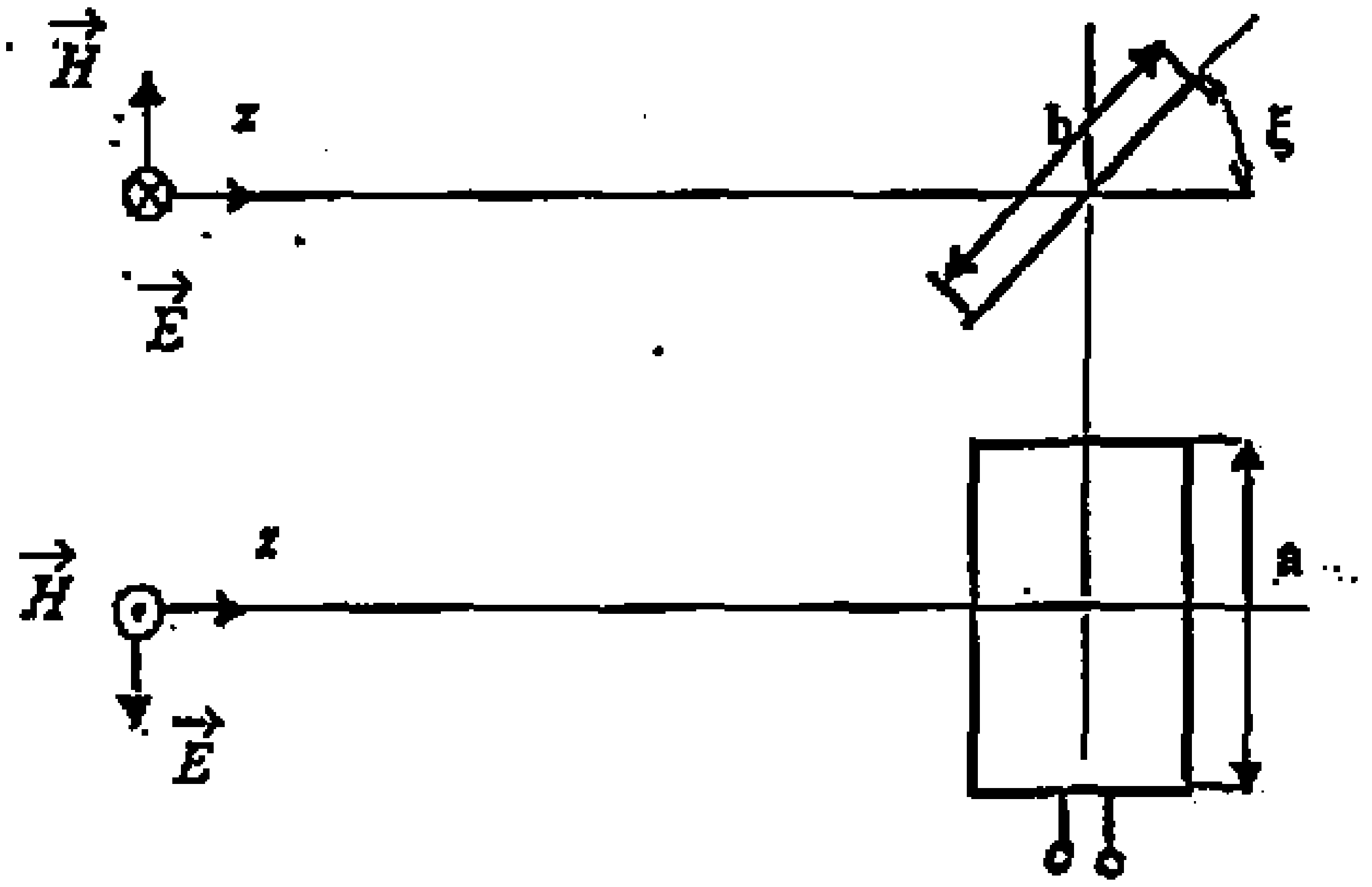
$U_2 = U_{ref}.0,5.\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{k}.a_k$ — a_k....... poloha přepínače (0, 1) 1 bod

$U_{11} = 5V \rightarrow 5 = 8.(\frac{1}{1}.0 + \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{8}.1) \rightarrow N = 0101$

$U_{12} = 10V \rightarrow 10 = 8.(\frac{1}{1}.1 + \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{4}.1 + \frac{1}{8}.0) \rightarrow N = 1010$ 1 bod

PŘÍKLAD Č. 4 celkem 6 bodů

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří ve vzduchu ve směru kladné osy z. Vektor okamžité hodnoty intenzity elektrického pole je $\vec{E}(z,t)=\vec{x}_0 E_m \sin(\omega t-\alpha z)$ [V/m]. V prostoru je umístěna cívka (viz obr.). Vypočítejte v ní indukovanou okamžitou hodnotu napětí, je-li:



kmitočet vlny f = 300 kHz
rozměry závitu a = 0,5 m
b = 1 m
počet závitů N = 10
$E_m = 1$V/m
$\xi = 45°$

$\varepsilon_0 \doteq \frac{1}{36\pi}10^{-9}$ F/m
$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m

Indukované napětí vypočítáme z upravené druhé Maxwellovy rovnice

$$u_i(t) = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

Magnetický tok jedním závitem cívky je

$$\Phi = \iint \vec{B}.d\vec{S}$$

Magnetickou indukci vypočítáme ze vztahu

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{resp.} \quad B_y = \mu_0 H_y$$ 1 bod

Intenzita magnetického pole pro danou vlnu je

$$H_{ym} = \frac{E_m}{Z_0} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \quad [\Omega]$$ 1 bod

Rozměry závitu a,b ⟨⟨λ vlny ($\lambda = \frac{c}{f} \doteq 10^3$m), lze tedy považovat v ploše závitu S = ab magnetickou indukci B_y = konst., takže

$$\Phi = B_{ym} S \cos\xi = \mu_0 \frac{E_{xm}}{Z_0} S \cos\xi \quad \left[\mathrm{Vs/m^2}\right].$$ 2 body

Indukované napětí v cívce, resp. jeho okamžitá hodnota je

$$u_i(t) = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad [\mathrm{V}]$$

$$u_i(t) = -\frac{\mu_0}{Z_0}\omega E_{xm} S N \cos\xi \cos(\omega t - \alpha z) \quad [\mathrm{V}]$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2\pi/\lambda = 2\pi 10^{-3} \quad \mathrm{m^{-1}}$$

$$u_i(t) = -2{,}22.10^{-2} \cos(6\pi 10^5 t - 2\pi 10^{-3} z) \quad [\mathrm{V}]$$ 2 body

Výpočetní technika

Tématické okruhy k první státní zkoušce

Jazyk Pascal, datové typy, standardní typy, výrazy, řídící struktury, rekurzivní algoritmy, iterace, vstupy a výstupy, soubory input a output, pProcedury a funkce, bloková struktura programu, strukturované programování

Strukturované typy, pole, záznamy, variantní část, soubory, jejich typy a přístup k nim, textové soubory, statické a dynamické datové struktury, typ ukazatel

TurboPascal, omezení a rozšíření, standardní moduly TurboPascalu, grafika, modulární stavba programu, překrývání modulů

Datové typy zásobník, fronta, tabulka, programovací techniky, řazení, seznamy, stromy, hledání, abstraktní datový typ

Objektově orientované programování

Strojově orientované jazyky, asembler, struktura operačních systémů

Základní struktura číslicového počítače

Instrukční soubor číslicového počítače, typy instrukcí, adresovací módy

Kombinační a sekvenční logické obvody, jejich charakteristika a formy popisu

Paměti, jejich typy a charakteristiky, vyrovnávací paměť (cache), virtuální paměť

Principy činnosti periferních zařízení

Sběrnice, připojování pamětí a periferií

Zobrazení informace v počítačích, použité kódy, aritmetické operace

Řadič počítače a jeho organizace

Typy počítačových sítí, lokální sítě a způsoby přidělování sběrnic

Výpočetní technika

Zadání a řešení příkladů k první státní zkoušce

1. - Zadání - body: 6

a) Co rozumíte pod pojmy adresová, logická a datová sběrnice počítače?

b) Vysvětlete rozdíl mezi synchronním a asynchronním režimem sekvenčního obvodu?

c) Vysvětlete funkci vyrovnávací paměti cache.

d) Jaký je rozdíl mezi datovým typem *integer* a celými čísly

e) Vysvětlete rozdíl mezi frontou a zásobníkem

1. - Řešení

a) Sběrnice je soustava vodičů, která slouží ke komunikaci procesoru s ostatními částmi počítače (tj. s pamětmi, vstupními a výstupními branami a dalšími obvody typu řadič přerušení, obvod přímého přístupu do paměti a pod.). Součástí definice sběrnice jsou i pravidla zmíněné komunikace a mechanické a elektrické parametry (typy konektorů a úrovně elektrických signálů). Adresová část sběrnice slouží k určení jednotky, která bude s procesorem v daném případě komunikovat nebo k určení adresy v operační paměti, datová část umožňuje vlastní přenos dat a řídící část sběrnice definuje povely řídícího charakteru, např. směr přenosu dat, rozlišení paměťového či periferního adresového prostoru, signalizace žádosti o přerušení, povolení této žádosti a pod.

b) Při synchronním režimu mohou nastávat přechody mezi stavy sekvenčního obvodu pouze v určitých časových okamžicích, které jsou definovány tzv. hodinovými pulsy. Minimální perioda těchto pulsů však musí být dostatečně dlouhá, aby stačily odeznít jednak všechny přechodné děje na výstupech kombinační části obvodu a jednak aby se spolehlivě překlopily paměťové členy. Při asynchronním režimu se hodinové pulsy nepoužívají a přechody mezi vnitřními stavy nastávají bezprostředně po změnách výstupů kombinační části. Návrh asynchronních obvodů je podstatně složitější, protože je třeba eliminovat všechny přehodné děje, které by mohly způsobit nežádoucí přechody mezi vnitřními stavy.

c) Vyrovnávací paměť (cache) je v hierarchii paměťového systému počítače umístěna mezi procesorem a operační pamětí počítače. Ve srovnání s operační paměti je však menší, ale rychlejší a programátorovi se jeví jako transparentní. Bezprostředně po spuštění programu v operační paměti je paměť cache vždy prázdná, ale postupně se zaplňuje čtenými údaji z operační paměti (tj. instrukcemi i operandy). Kromě těchto údajů se do paměti cache ukládá i jejich skutečná adresa v operační paměti. Tato adresa slouží jako klíč pro vyhledání dané informace v paměti cache. Každé další čtení informace, jejíž kopie se nachází v paměti cache, se provádí pouze z této rychlejší paměti. Pravděpodobnost opakovaného čtení týchž informací je při provádění programů vysoká. Složitější situace nastává při zápisu.

d) Celá čísla mají nekonečný obor hodnot, typ integer má množinu hodnot omezenu na konečnou množinu -maxint..maxint

e) Fronta je datová struktura organizovaná tak, že přicházející informace se ukládá na konec posloupnosti, ze které je možno informaci vybírat pouze od začátku (FIFO). Zásobník je podobná struktura, z níž však lze vybírat pouze od konce (LIFO).

2. - Zadání - body: 3

Určete hodnotu proměnné X v příkazu `write`:

```
Program TEST;
var A,X:integer;
function ALFA(N:integer):integer;
 var C,S:integer;
 begin
     S:=0;
     while N>0 do
      begin
       C:=N mod 10;
       S:=S+C;
       N:=N div 10
      end;
     ALFA:=S
 end;
begin
 A:=176;
 X:=ALFA(A);
 write(X)
end.
```

2. - Řešení

14

3. - Zadání - body: 6

Napište proceduru, která určí délku největšího souvislého useku sudých čísel v dané posloupnosti kladných celých čísel. Posloupnost je zadána pomocí parametru(ů) této procedury. Použití procedury ilustrujte na jednoduchém programu. (Pascal nebo Turbo Pascal).

3. - Řešení

```
type kladne=word;
(*
 Procedura, ktera v posloupnosti kladnych celych cisel
 urci pocet cisel tvoricich  nejdelsi  souvisly  usek
 slozeny jen ze sudych cisel
*)
```

```
procedure delka_posl(var res:kladne);
var max,counter  :kladne;
    num          :kladne;
begin
  max:=0; counter:=0;
  while not EOF do begin
    read(num);
    cur:=not odd(num);
    if cur then
             inc(counter)  { Dalsi prvek useku  }
           else begin      { Konec useku        }
                if counter > max then  { Jestlize je
                                 posledni usek delsi nez max }
                                   max:=counter;

                counter:=0;
               end;
                end;
  res:=max;
end;

{nasleduje testovani, ukazka pouziti:}

var res:kladne;
begin
  delka_posl(res);
  write(res)
end.
```

odd. lich.

15.4.2000

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky. Každý příklad je hodnocen 7 body.

16.1. **Příklad:** Určete řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = -5x + 2y + 2e^{-t}$$
$$\dot{y} = x - 6y + 4e^{-t},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0_+) = 3,\ y(0_+) = 2$.

16.2. **Příklad:** Funkci f,

$$f(t) = 2 - t, \quad t \in \langle 0, 2\rangle$$

rozviňte v kosinovu Fourierovu řadu. Načrtněte graf součtu vypočtené řady na intervalu $\langle -4, 4\rangle$.

16.3. **Příklad:** Vypočtěte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = xy(3 - x - y).$$

16.4. **Příklad:** Pro komplexní z najděte všechny kořeny rovnice

$$\cosh(z + j\frac{\pi}{2}) + je^2 = 0.$$

16.5. **Příklad:** Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 2\rangle,\ y \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Stanovte:
a) konstantu k,
b) pravděpodobnost $P(Y < 2X - X^2)$,
c) podmíněnou střední hodnotu $E(Y|x)$.

15.4.2000

První souborná zkouška - FYZIKA

16.1

Setrvačník ve tvaru válce o poloměru R = 0,5 *m*, jehož osový moment setrvačnosti je J_0 = 200 *kg m*^{2}, se otáčí okolo své osy tak, že vykonává 180 otáček za minutu. V čase t = *0* se ze dvou protilehlých stran přiloží k setrvačníku brzdicí špalky a začnou působit konstantní silou F kolmo k povrchu setrvačníku; součinitel tření je přitom roven ξ = 0,1. Takto brzděný setrvačník se zastaví za dvě minuty od počátku brzdění. Určete

a) počet otáček, které setrvačník v průběhu brzdění vykoná,

b) velikost síly F.

(max. 8 bodů)

16.2

a) Napište vztahy pro souřadnice a čas při transformaci mezi dvěma inerciálními soustavami souřadnic, jež se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí v ve směru osy X (Lorentzova transformace)

b) Určete rychlost elektronu urychleného rozdílem potenciálů 250 *kV*

(max. 7 bodů)

Příklady řešte napřed obecně, pak dosaďte číselné hodnoty (pokud byly zadány); výsledky vyznačte dvojitým podtržením. U výsledků vždy napište i jejich rozměr v jednotkách soustavy SI.

Některé základní fyzikální konstanty

Planckova konstanta	$h = 6{,}63.10^{-34}$ *J.s*	*náboj elektronu*	$e = 1{,}6.10^{-19}$ *A.s*
gravitační konstanta	$\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ *N.m*^{2}*.kg*$^{-2}$	*klidová hmotnost elektronu*	$m_e = 9{,}1.10^{-31}$ *kg*
rychlost světla ve vakuu	$c = 3{,}00.10^8$ *m/s*	*klidová hmotnost protonu*	$m_p = 1{,}67.10^{-27}$ *kg*
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38.10^{-23}$ *J/K*	*molární plynová konstanta*	$R_m = 8{,}3$ *J.K*$^{-1}$*.mol*$^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022.10^{23}$ *mol*$^{-1}$	*Stefanova-Boltzmannova konst.*	$\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ *W.m*$^{-2}$*.K*$^{-4}$

15.4.2000

VTP-C16

Výpočetní technika, část VTP

16.1 Zadání (teorie): **1 bod**

Jaký je hlavní rozdíl mezi kompilátorem a interpretem nějakého programovacího jazyka? interpret – překládá program za běhu
kompilátor – výsledkem je strojový kód – [illegible]

16.2 Zadání: **1 bod**

Jaký je rozdíl mezi Pascalským typem Boolean a typem interval 0..1? Existuje nějaká standardní možnost převodu mezi těmito typy?
dle interpretace Boolean – jeden bit, 0..1 ..celý bajt, převod if ...

16.3 Zadání (analýza): **2 body**

Určete obsah souboru **output** v Turbo Pascalu.

```
program x;

type  fun = function (i : integer) : real;

function f1 (i:integer):real;far;
begin
 f1 := i/2;
end;

procedure p(f:fun);
begin
  writeln(f(4) = f1(5))
end;

begin
 p(f1);
end.
```

16.4 Zadání (syntéza): **6 bodů**

1. Napište proceduru, které zjistí, zda daná čtvercová matice je diagonální
2. Napište proceduru, které zjistí, zda daná čtvercová matice je dolní trojúhelníková.

Procedury použijte v hlavním programu.

Motorola 1234ABCD

BE LE – Intel

	BE	LE
00	12	CD
01	34	AB
02	AB	34
03	CD	12

Výpočetní technika, část UPS

16.5 Zadání: 1 bod

Jaké typy dat se ukládají do hlavní paměti? Co je reprezentace dat označovaná *little endian* a *big endian*? Jak se z výpisu paměti pozná, co je instrukce a co data a jakého typu jsou příp. data? (Kromě výpisu nejsou k dispozici žádné další informace.)

instrukce programu a data, z výpisu paměti dost těžko

16.6 Zadání: 2 body

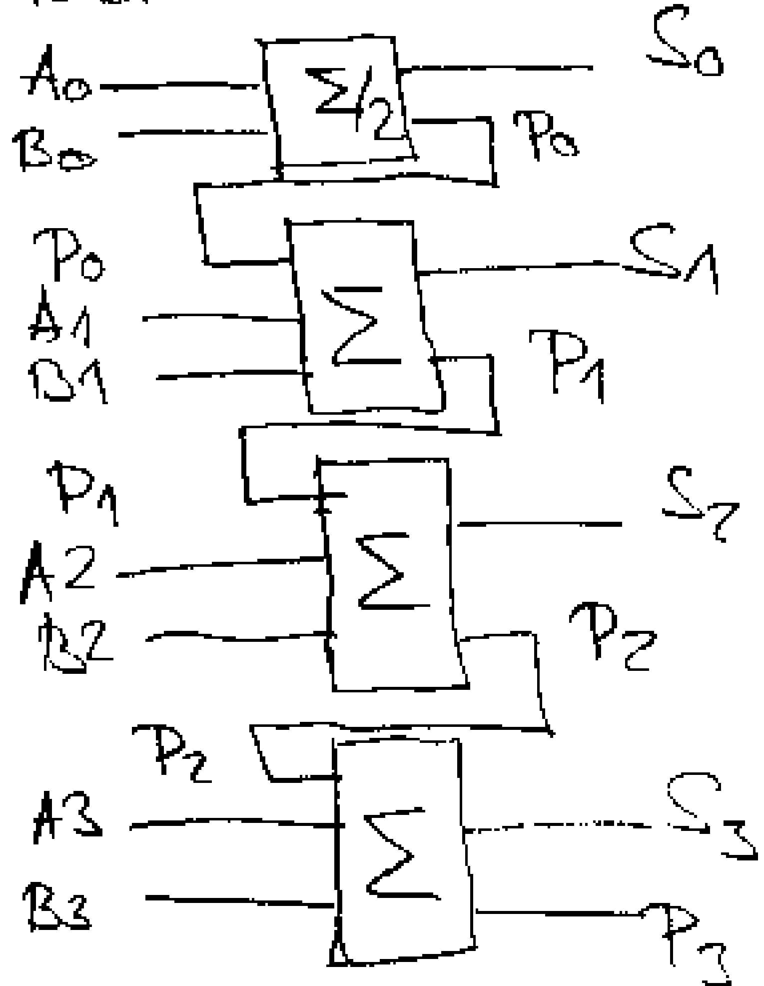
Znázorněte vnitřní propojení sčítačky - odčítačky čtyřbitových binárních čísel v doplňkovém kódu. Jako stavební prvky použijte bloky sčítačky pro jeden binární řád. Indikujte přeplnění.

16.7 Zadání: 2 body

Charakterizujte funkční vlastnosti pamětí RAM, ROM, PROM, EPROM a EEPROM z hlediska uchování uložené informace při vypnutí napájecího napětí a možnosti změny uložené informace.

RAM – ztrácí zápis, energeticky závislá
ROM – permanentní, obsah určen při výrobě
PROM – permanentní, jednou naprogramovaná
EPROM – jednou naprogramovaná, mazání UV zářením
EEPROM – elektricky mazatelná
kromě RAM všechny energeticky nezávislé

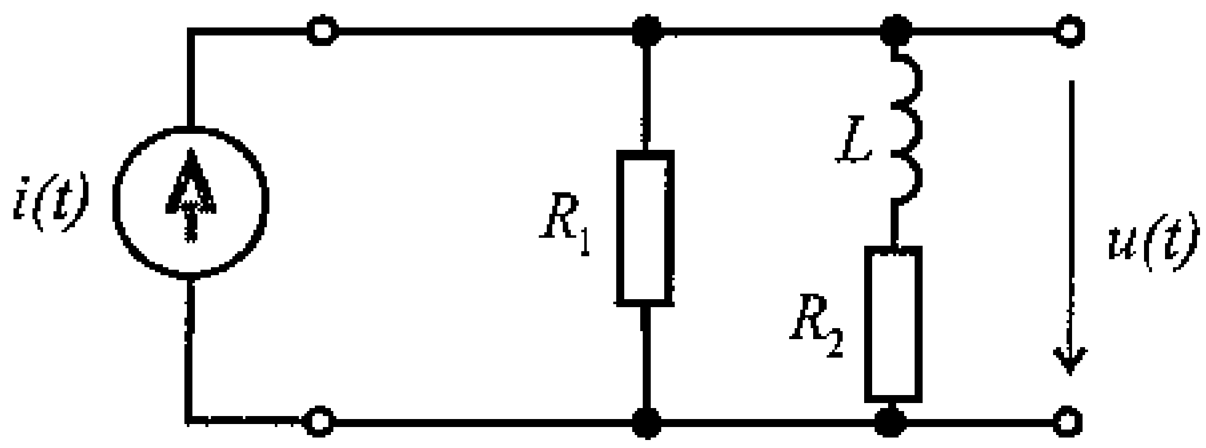
16.6.



TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 16. 1 **Celkem 7 bodů**

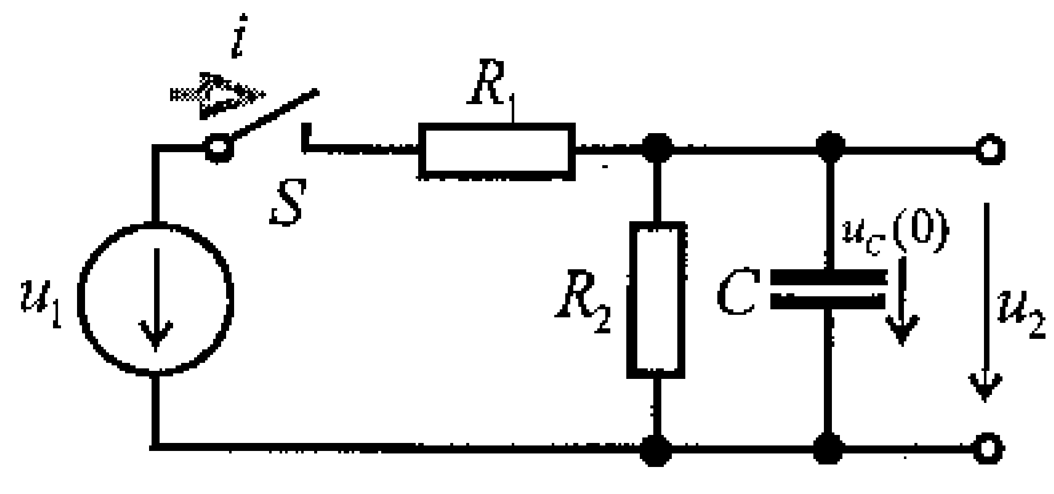
Obvod podle obr. je napájen ze zdroje proudu $i(t) = 0.1 \sin(1000\,t)$ [A]. Vypočítejte časový průběh napětí u(t) v ustáleném stavu a celkový činný výkon, je-li $R_1 = 146{,}4\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $L = 0.3464$ H.
Nakreslete zapojení a uveďte možnosti měření fázového rozdílu mezi vstupním proudem a výstupním napětím



Obr. 1

Příklad 16. 2 **Celkem 11 bodů**

Obvod podle obr. 2 byl pro $t < 0$ v ustáleném stavu. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro $t > 0$, jestliže se v čase $t = 0$ sepne spinač S a tím připojí zdroj napětí $u_1(t) = 10 \sin(1000\,t)$ [V]. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2 = 2500\ \Omega$, $C = 0.4\ \mu F$.
Výstupní napětí v ustálekém stavu je měřeno vektorvoltmetrem s řízeným usměrňovačem (jako referenční napětí je použito napětí u_1). Nakreslete blokové schéma vektorvoltmetru a načrtňete typické průběhy na výstupech jednotlivých bloků.

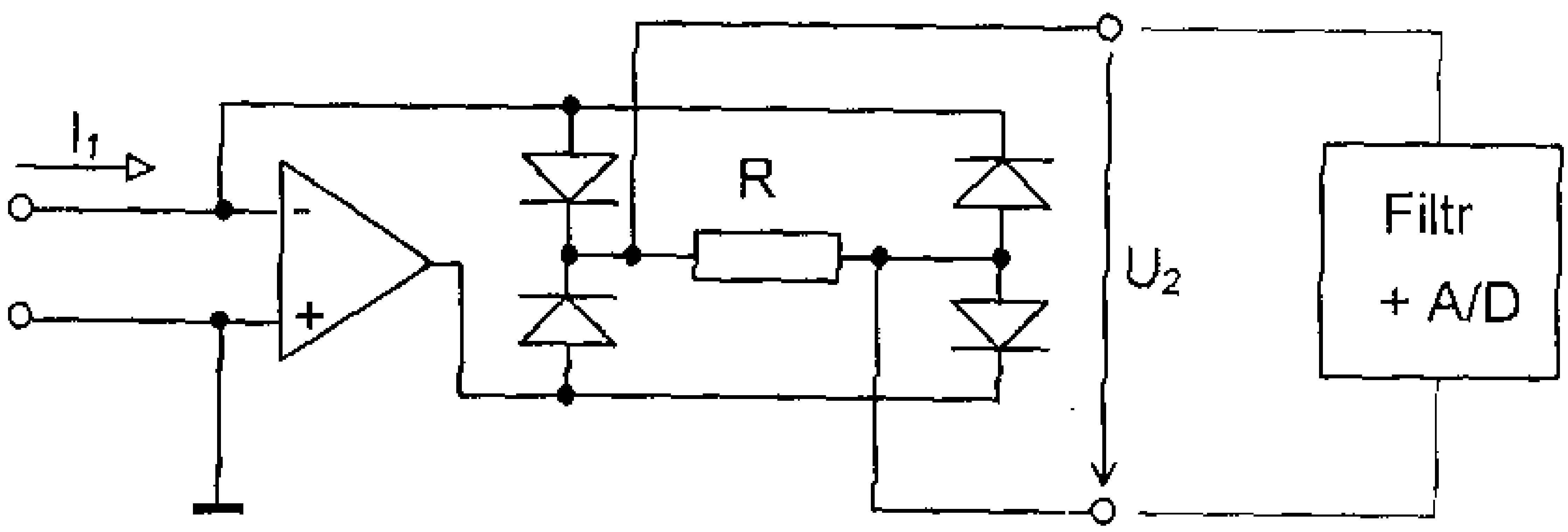


Obr. 2

15.4.2000

Příklad 16.3 **celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. obsahuje ideální operační zesilovač a čtveřici ideálních diod. Vypočtěte časový průběh *výstupního napětí $u_2(t)$, je-li vstupní proud $i_1(t)$ = 0,01414 sin 1000t* [A]. Odpor R určete tak, aby tomuto vstupnímu proudu odpovídala stejnosměrná složka na výstupu *převodníku* 0,2 V. *Uveďte, jaký je vstupní a výstupní odpor daného zapojení*. S jakou max. možnou chybou bude měřen harmonický proud s ef. hodnotou 0,2 mA, je-li odchylka od *jmenovité hodnoty použitého rezistoru menší než 0,1% a AD převodník s rozsahem 2 V* (použitý pro měření výstupního napětí) má udanou chybu 0,1% z údaje + 0,05% z rozsahu? Lze toto zapojení použít i pro měření efektivní hodnoty při neharmonických průbězích?



Příklad 16.4

Celkem 6 bodů

Vodivá koule o poloměru R_1 = 5 mm je nabita nábojem $Q_0 = 2.1\ 10^{-9}$ C a je soustředně umístěna v duté nenabité vodivé kouli, která má vnitřní poloměr R_2 = 15 mm a vnější poloměr R_3 = 20 mm. V prostoru mezi koulemi je dokonalé dielektrikum s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 2$. Vně vnější koule je vzduch.

Stanovte a nakreslete závislost elektrického potenciálu na poloze v následujících čtyřech oblastech:

a) $r \leq R_1$ b) $R_1 \leq r \leq R_2$ c) $R_2 \leq r \leq R_3$ d) $r \geq R_3$

Potenciál v nekonečnu zvolte rovný nule. Jak veliký je potenciál ve vzdálenosti r = 10 mm od středu vnitřní vodivé koule?

Příklad 16.5

Celkem 4 body

Rovinná lineárně polarizovaná elektromagnetická vlna se šíří v kladném směru osy z na kmitočtu f = 10 MHz v prostředí $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma(\gamma) = 3$ S/m. V čase t = 0 s a v místě z = 0 je fáze intenzity elektrického pole rovna $\pi/6$ a její okamžitá hodnota E (t,z) = 5 V/m. Vypočítejte okamžité hodnoty E a H v čase $t = 1.10^{-6}$ s a v místě z = 0.5 m. E má směr osy x, H směr osy y.

$\varepsilon_0 = \dfrac{\cdot\ 10^{-9}}{36\pi}$ F/m $\qquad\qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m

27.11.1999

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky. Každý příklad je hodnocen 7 body.

14.1. Příklad: Je dána funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

Rozhodněte zda f má v bodech $A = [0,0]$, $B = [5,6]$, $C = [-5,6]$ extrémy a určete jejich typ.

14.2. Příklad: Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$xy' + y = 2x \ln x + x$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

14.3. Příklad: Pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ platí

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \cos nx.$$

Odvoďte odtud Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x \cos x$, $\quad x \in (-\pi, \pi)$ a určete, kdy mají koeficienty rozvoje absolutní hodnotu menší než 10^{-2}.

14.4. Příklad: Najděte všechna komplexní z, pro která

$$(\cos^2 z + 5)(\sin z + 3) = 0.$$

14.5. Příklad: Nechť $X = (X_1, X_2)$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(u,v) = \begin{cases} A(u + 2v) & \text{pro } (u,v) \in (0,1) \times (0,2) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete A. Jsou X_1 a X_2 nezávislé?

b) Čemu se rovná hodnota $P(X_1 X_2 \geq 1)$?

c) Nechť $U = \frac{X_1}{X_1 + 2X_2}$. Vypočtěte $E(U)$.

27.11.1999

První souborná zkouška - FYZIKA

14.1

Těleso o hmotnosti m se pohybuje rychlostí v a narazí kolmo na stěnu, jež se pohybuje ve stejném směru rychlostí u, a odrazí se od ní. Ráz je přitom možno považovat za dokonale pružný. Určete

a) jak se změní hybnost tělesa,
b) jak se změní jeho kinetická energie.

Hmotnost stěny je mnohem větší než hmotnost tělesa

(max. 8 bodů)

14.2

a) K rozkladu světla je možné užít optický hranol nebo difrakční mřížku. Vysvětlete rozdíl mezi těmito dvěma způsoby rozkladu světla.
b) Kolmo na difrakční mřížku, která má 500 vrypů/mm, dopadá světlo He-Ne laseru o vlnové délce 632 *nm*. Určete úhly, o něž se bude odchylovat toto světlo po průchodu mřížkou

(max. 7 bodů)

Příklady řešte napřed obecně, pak dosaďte číselné hodnoty (pokud byly zadány); výsledky vyznačte dvojitým podtržením. U výsledků vždy napište i jejich rozměr v jednotkách soustavy SI.

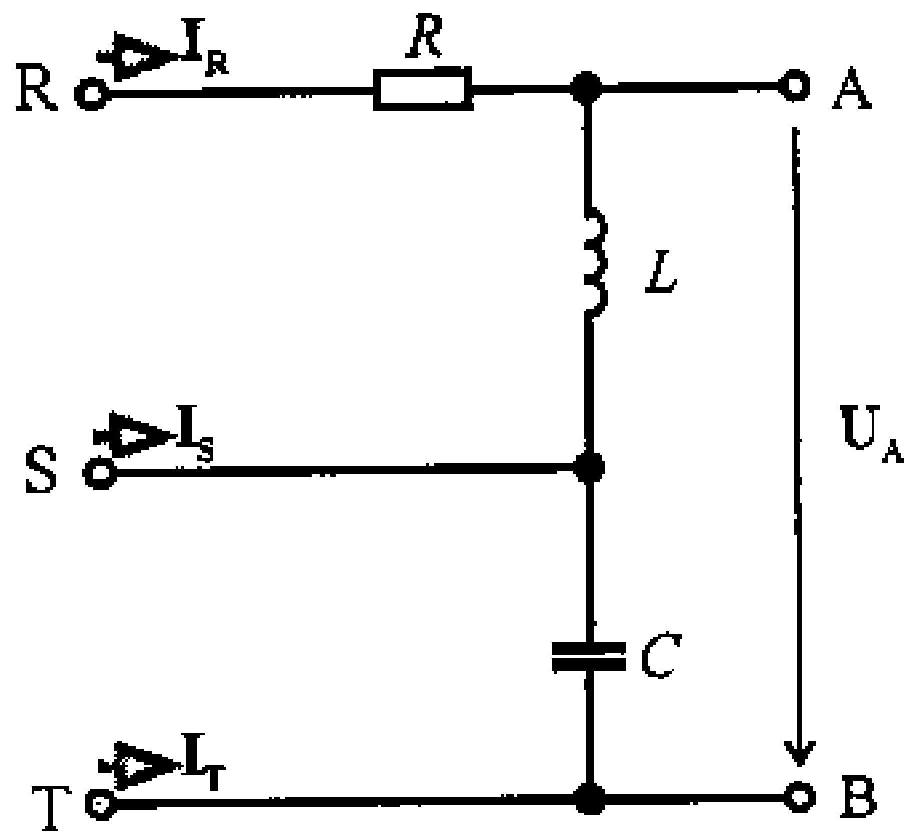
Některé základní fyzikální konstanty

Planckova konstanta	$h = 6{,}63.10^{-34}\ J.s$	*náboj elektronu*	$e = 1{,}6.10^{-19}\ A.s$
gravitační konstanta	$\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$	*klidová hmotnost elektronu*	$m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$
rychlost světla ve vakuu	$c = 3{,}00.10^8\ m/s$	*klidová hmotnost protonu*	$m_p = 1{,}67.10^{-27}\ kg$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38.10^{-23}\ J/K$	*molární plynová konstanta*	$R_m = 8{,}3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022.10^{23}\ mol^{-1}$	*Stefanova-Boltzmannova konst.*	$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 14. 1 **Celkem 7 bodů**

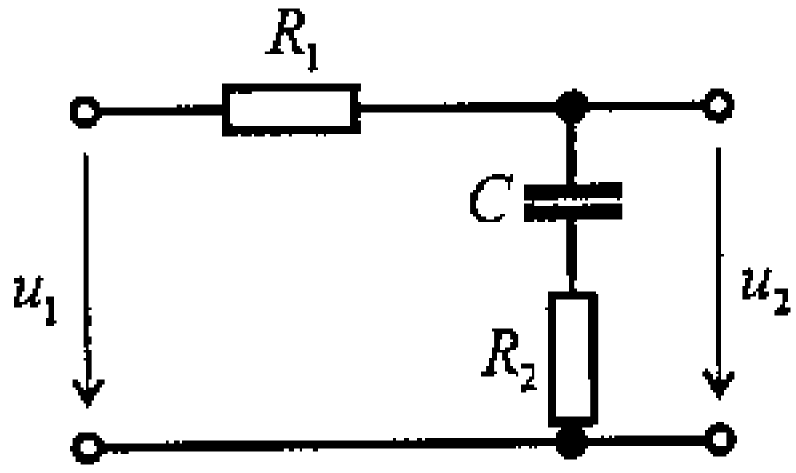
Obvod podle obr. 1 je napájen z trojfázového zdroje napětí o kmitočtu $f = 50$ Hz, jehož fázory napětí v měřítku efektivních hodnot jsou $\mathbf{U}_{RS} = 380$ V, $\mathbf{U}_{ST} = 380e^{-j2\pi/3}$. Vypočítejte fázor napětí $\mathbf{U}_{AB}$ a časový průběh napětí $u_{AB}(t)$ v ustáleném stavu a celkový činný výkon, je-li $R = 500\,\Omega$, $L = 1{,}5915\,H$, $C = 3{,}183\,\mu F$.
Nakreslete zapojení wattmetrů pro měření činného výkonu dané nesouměrné zátěže a uveďte vztah pro určení celkového činného výkonu z údajů jednotlivých wattmetrů.



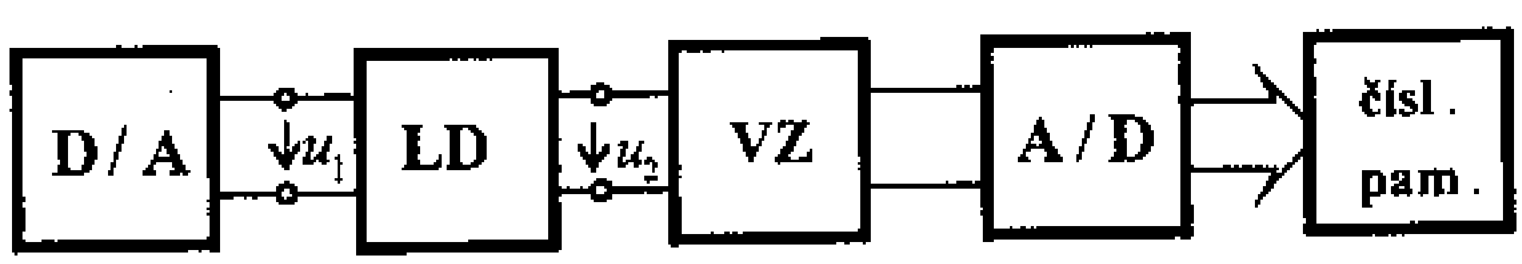
Obr. 1

Příklad 14. 2 **Celkem 11 bodů**

Lineární dvojbran podle obr. 2b) je zapojen v měřicím řetězci pro automatizovaný záznam přechodného děje podle obr. c).
Vypočtěte časový průběh výstupního napětí dvojbranu $u_2(t)$, jestliže budicí D/A převodník generuje na vstupu dvojbranu v čase $t = 0$ napěťový skok z hodnoty $U_{11} = 5$ V na hodnotu $U_{12} = 10$ V, t.j $u_1(t) = 5 + 5 \cdot 1(t)$. Parametry prvků dvojbranu jsou $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $C = 10\,\mu$F. Předpokládejte, že výstupní odpor D/A převodníku je roven nule, vstupní odpor vzorkovače je nekonečný. Vypočtený průběh znázorněte graficky.
Dále nakreslete principiální schéma 4-bitového D/A převodníku s váhovými odpory a určete vztah mezi vstupním binárním kódem a výstupním napětím.



a)



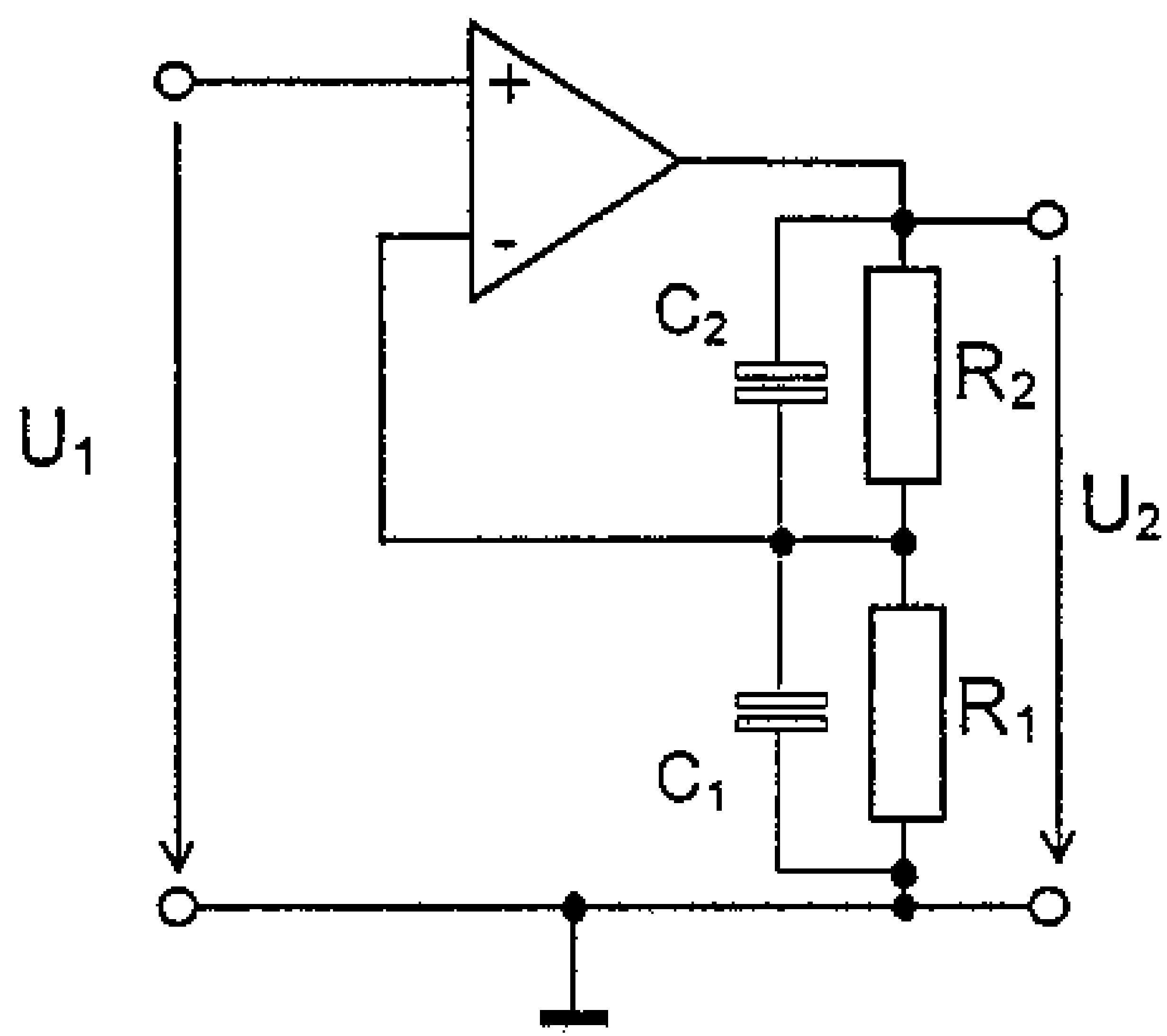
b)

Obr. 2

Příklad 14.3 **27.11.1999** **celkem 7 bodů**

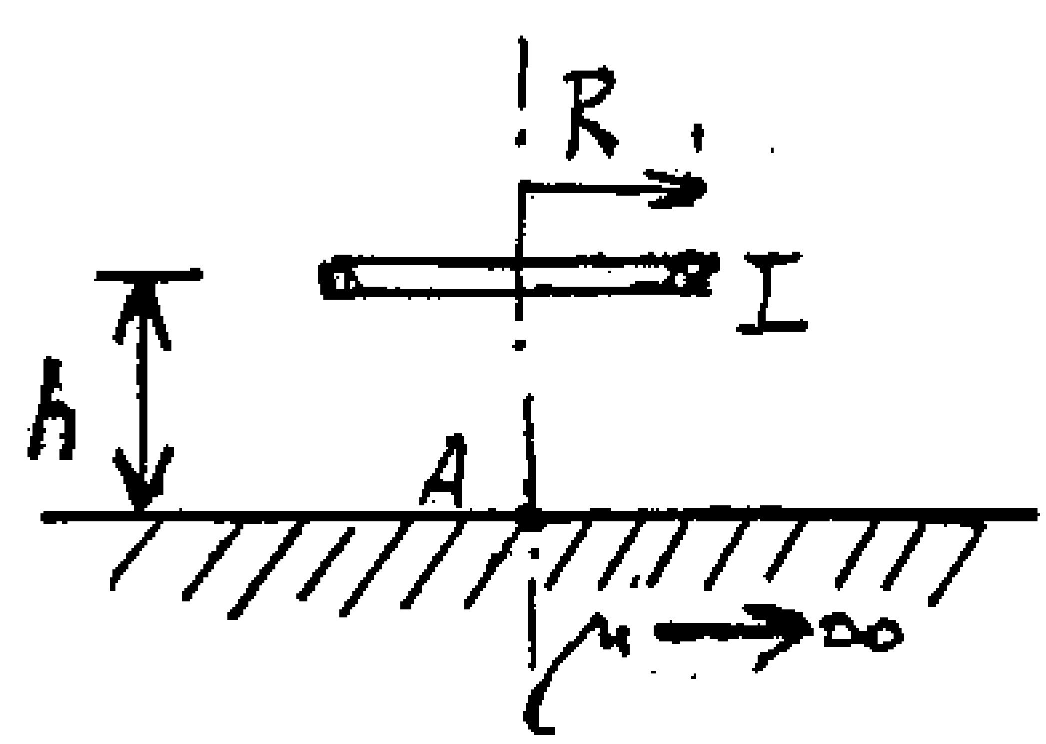
Měřicí zesilovač střídavého napětí zapojený podle obrázku je tvořen ideálním operačním zesilovačem a rezistory $R_1 = 10\ k\Omega$, $R_2 = 0{,}99\ M\Omega$. Určete zesílení tohoto zesilovače a max. možnou chybu tohoto zesílení, jsou-li odchylky odporu použitých rezistorů max. 0,5% od jejich jmenovité hodnoty.

Pro případ, že reálné rezistory mají parazitní kapacity $C_1 = C_2 = 31{,}83$ pF, určete přenos $P(j\omega) = U_2 / U_1$ daného zapojení a nakreslete jeho asymptotickou modulovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Déle určete modulovou a fázovou chybu přenosu oproti ideálnímu zesilovači se zesílením $K = 100$ na kmitočtu $f = 5$ kHz (odchylky odporu použitých rezistorů od jejich jmenovité hodnoty pro tento případ zanedbejte).



Příklad 14.4 - skripta str 80 **Celkem 6 bodů**

Kruhový závit o poloměru R = 0.5 m se zanedbatelně malým průřezem vodiče protékaný stejnosměrným proudem I = 1 A je umístěn ve vzduchu ve vzdálenosti h = 0.5 m nad feromagnetickou deskou, jejíž permeabilita $\mu \rightarrow \infty$. Jaká je intenzita magnetického pole $\vec{H}$ na ose tohoto závitu a na povrchu feromagnetické desky, tj. v bodě A (rovina, v níž leží závit, je s deskou rovnoběžná).



Příklad 14.5 **Celkem 4 body**

Rovinná lineárně polarizovaná elektromagnetická vlna se šíří v kladném směru osy z na kmitočtu f = 100 MHz v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma(\gamma) = 0$ S/m. V čase t = 0,1 s a v místě z = 6 m přenáší okamžitý výkon S (t,z) = 21 W/m^2. Intenzita magnetického pole má v čase t = 0 s a v místě z = 0 m fázi $\varphi = 1$ rad. Napište vztahy pro $\vec{E}(t,z)$, $\vec{H}(t,z)$, $\hat{E}(z)$, $\hat{H}(z)$, má-li E směr osy x, H směr osy y.

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \text{F/m} \qquad \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \text{H/m}$$

27.11.1999

VTP-C14

Výpočetní technika, část VTP

14.1 Zadání (teorie): 1 bod

Jaké výhody a nevýhody má použití rekurze?

VÝHODA – zjednodušení algoritmu
NEVÝHODA – režije, paměťové nároky

14.2 Zadání: 1 bod

Co je to konstruktor a jaká je jeho funkce?

KONSTRUKTOR – část programu volaná při vytváření objektu (inicializaci)
– funkce – inicializace dat objektu, alokace paměti

14.3 Zadání (analýza): 3 body

Zjistěte, jakou úlohu má následující funkce. Navrhněte nerekursivní řešení pro daný algoritmus.

```
Function X(a,b: integer):integer;
var r: integer;
begin
      r:=a mod b; {čísla a, b se předpokládají kladná}
      if r=0 then X:= b else X:=X(b,r)
end;
```

14.4 Zadání (syntéza): 5 body

Napište program, který vygeneruje n prvních řádek Pascalova trojuhelníka. Pascalovým trojuhelníkem se rozumí schéma, které v *i-tém* řádku obsahuje koeficienty binomického rozvoje $(a+b)^i$. Jeho začátek má tvar:

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5 10 10  5  1
```

n=0 $\binom{0}{0}$ 1
n=1 $\binom{1}{0}$ 1 $\binom{1}{1}$ 1
n=2 $\binom{2}{0}$ 1 $\binom{2}{1}$ 2 $\binom{2}{2}$ 1
n=3 $\binom{3}{0}$ 1 $\binom{3}{1}$ 3 $\binom{3}{2}$ 3 $\binom{3}{3}$ 1
$\binom{4}{0}$ 1 $\binom{4}{1}$ 4 $\binom{4}{2}$ 6 $\binom{4}{3}$ 4 $\binom{4}{4}$ 1

Návod: Použijte závislosti hodnot na i-tého řádku na hodnotách řádku předchozího: $c^i_j = c^{i-1}_j + c^{i-1}_{j-1}$ pro j=1, ..., i - 1; $c^i_0 = c^i_i = 1, c^i_j = \binom{i}{j}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

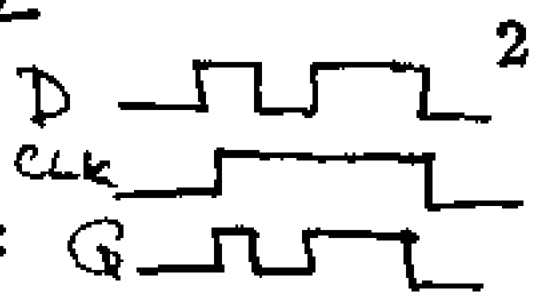
```
int faktorial ( int n )
{ fac=1;
  if (n==0) return(1);
  else
   for(i=n; i--; i>0)
     fac=fac*i;
  return(fac)
}

void main(void)
{
 for (n=0; n<5; n++)
  for (k=0; k<n; k++)
   printf("%d", kombi(n,k));
}

int kombi(int n, int k)
{return(faktorial(n)/(faktorial(n-k)*faktorial(k)));}
```

Výpočetní technika, část UPS

14.5 Zadání: **1 bod**

Vysvětlete rozdíl mezi synchronními klopnými obvody hranovými a hladinovými.
SYNCHRONNÍ – PŘECHOD mezi stavy podmíněn hodinovými pulzy
HRANOVÝ – citlivost při ↑ nebo ↓
HLADINOVÝ – kopíruje vstup

14.6 Zadání: **2 body**



Registrová nepřímá adresace.

Toto je aktuální obsazení registrů procesoru 8086:

```
    AH AL        BH BL       CH CL      DH DL
AX  FF FF   BX   29 5D   CX  00 F2  DX 3A F2

 SP  0F FF   SI  00 12   IP  00 05
 BP  00 A0   DI  00 0A
 SS  2D 0C   DS  2D 0D   CS  2D 0E

     2D0C0:    20 07 20 07 20 07 20 07
     2D0C8:    20 07 20 07 20 07 20 07
     2D0D0:    8A 04 6D A3 40 F7 26 54
     2D0D8:    A3 8B 1E 8D A3 33 C9 03
     2D0E0:    1E 76 A3 13 C9 D1 E3 D1
     2D0E8:    02 89 A0 1B 11 DD FF 00
```

$DS \times 10h + SI = 2D0E2$

$AL = A3$

Co bude obsahem registru al po provedení instrukce `mov al,[si]` a proč?

14.7 Zadání: **2 body**

Jak jsou zobrazena čísla v tzv. pohyblivé řádové čárce? Co je tzv. skrytá jednička? Jak se provedou operace sčítání, odčítání, násobení a dělení? (Stačí základní princip.)

Obrazem A čísla je (m, e) (mantisa, exponent)

$\boxed{0110}\boxed{0100110}$
exp mantisa

$A = m \cdot z^{e}$ ← základ soustavy

Skrytá jednička

nenulová mantisa – bit v nejvyšším řádu je vždy roven 1
(tento bit lze ze zápisu nenulových čísel vypustit)

Sčítání/odčítání

1. upravit operandy tak aby měli stejný exp
2. sečíst/odečíst mantisy

Násobení/dělení

1. vynásobit/podělit mantisy
2. sečíst/odečíst exponenty

16.9.1999

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky. Každý příklad je hodnocen 7 body.

12.1. Příklad: Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Určete její lokální extrémy na množině

$$M = \{(x,y) \mid x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}.$$

12.2. Příklad: Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y' + y = f(t),\ \ t \in (0, +\infty)$$

s počáteční podmínkou $y(0_+) = 2$, kde

$$f(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{pro} \quad t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

12.3. Příklad: Vypočtěte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \cos ax$, $x \in (-\pi, \pi)$, a necelé a pomocí ní určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2}.$$

12.4. Příklad: Pro harmonickou funkci

$$u(x,y) = x \sin x \cosh y - y \cos x \sinh y$$

najděte holomorfní $F(z)$ tak, aby $u(x,y) = \operatorname{Re} F(z)$.

12.5. Příklad: Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X, Y takové, že má X rovnoměrné rozdělení na $\langle -1, 1 \rangle$ a Y má normální rozdělení $N(0,1)$.

a) Jaká je sdružená hustota vektoru (X,Y)?

b) Která z pravděpodobností je větší $P(Y \geq EX)$ nebo $P(X \geq EY)$?

c) Jaká je střední hodnota druhé mocniny velikosti vektoru (X,Y)?

První souborná zkouška - FYZIKA **16.9.1999**

12.1

Homogenní koule se kutálí bez prokluzování po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30°$. Určete

a) jakou rychlostí se bude pohybovat těžiště koule po proběhnutí dráhy $l = 5\ m$,

b) v jakém poměru je tato rychlost k rychlosti, kterou by se pohybovalo těžiště uvedené koule, kdyby se koule po nakloněné rovině smýkala bez tření

Moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose, která prochází jejím středem, je roven $J_0 = 2/5\ mR^2$. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ m\ s^{-2}$

(max. 8 bodů)

12.2

a) Pojednejte o vnitřní energii a entropii v termodynamice.

b) Jak se změní entropie, smísí-li se 2 *kg* vody o teplotě 50 *°C* s 5 *kg* vody o teplotě 15 *°C*? Je dáno měrné teplo vody c = 4200 *J/kg.K*

(max. 7 bodů)

Příklady řešte napřed obecně, pak dosaďte číselné hodnoty (pokud byly zadány); výsledky vyznačte dvojitým podtržením. U výsledků vždy napište i jejich rozměr v jednotkách soustavy SI.

Některé základní fyzikální konstanty

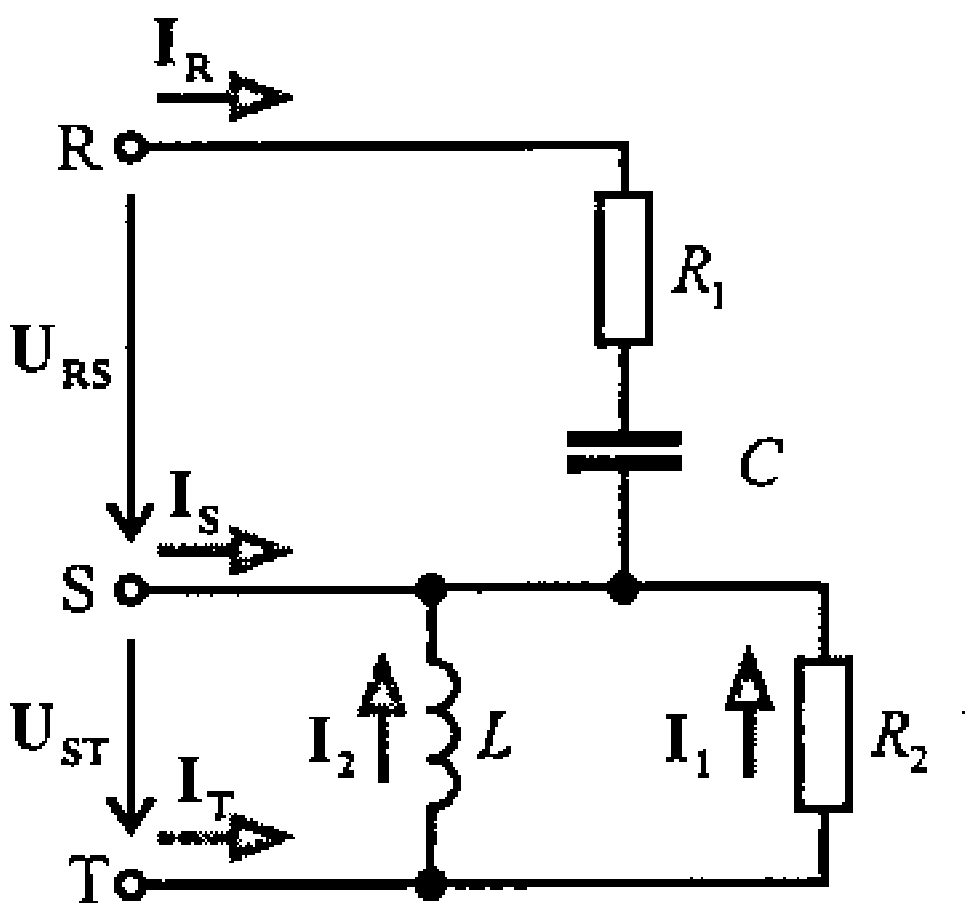
Planckova konstanta	$h = 6{,}63.10^{-34}\ J.s$	*náboj elektronu*	$e = 1{,}6.10^{-19}\ A.s$
gravitační konstanta	$\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$	*klidová hmotnost elektronu*	$m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$
rychlost světla ve vakuu	$c = 3{,}00.10^8\ m/s$	*klidová hmotnost protonu*	$m_p = 1{,}67.10^{-27}\ kg$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38.10^{-23}\ J/K$	*molární plynová konstanta*	$R_m = 8{,}3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022.10^{23}\ mol^{-1}$	*Stefanova-Boltzmannova konst.*	$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 12. 1 **Celkem 7 bodů**

Obvod podle *obr.1* je napájen z trojfázového zdroje jehož fázory napětí v měřítku efektivních hodnot jsou $\mathbf{U}_{RS} = 380$ V, $\mathbf{U}_{ST} = 380e^{-j2\pi/3}$. Vypočítejte fázor proudu $\mathbf{I}_R$ a jeho časový průběh $i_R(t)$ v ustáleném stavu a celkový jalový výkon, je-li $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $L = 0.6366$ H, $C = 15.915\ \mu$F.

Nakreslete zapojení wattmetrů pro měření jalového výkonu dané nesouměrné zátěže a uveďte vztah pro určení celkového jalového výkonu z údajů jednotlivých wattmetrů.

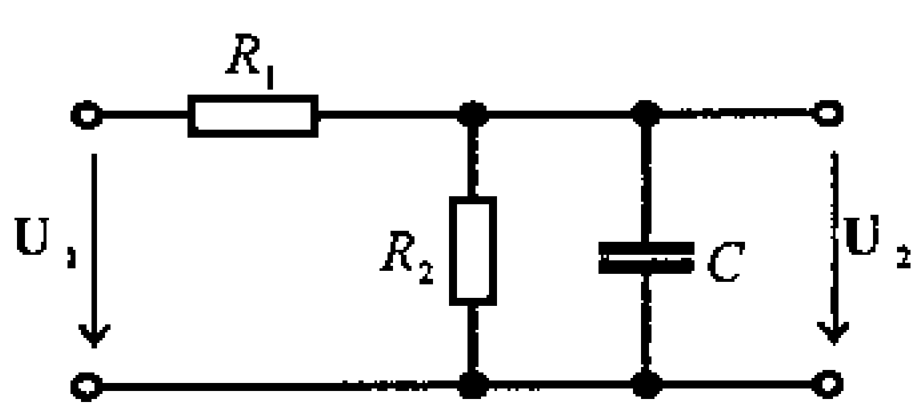


Obr.1

Příklad 12. 2 **Celkem 11 bodů**

Obvod podle obr. 2 se v čase t = 0 připojí na zdroj harmonického napětí $u_1(t) = 10\sin(20\,000t)$ [V]. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro t > 0, byl-li kapacitor pro t < 0 bez náboje. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, C = 0,1 μF. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor.

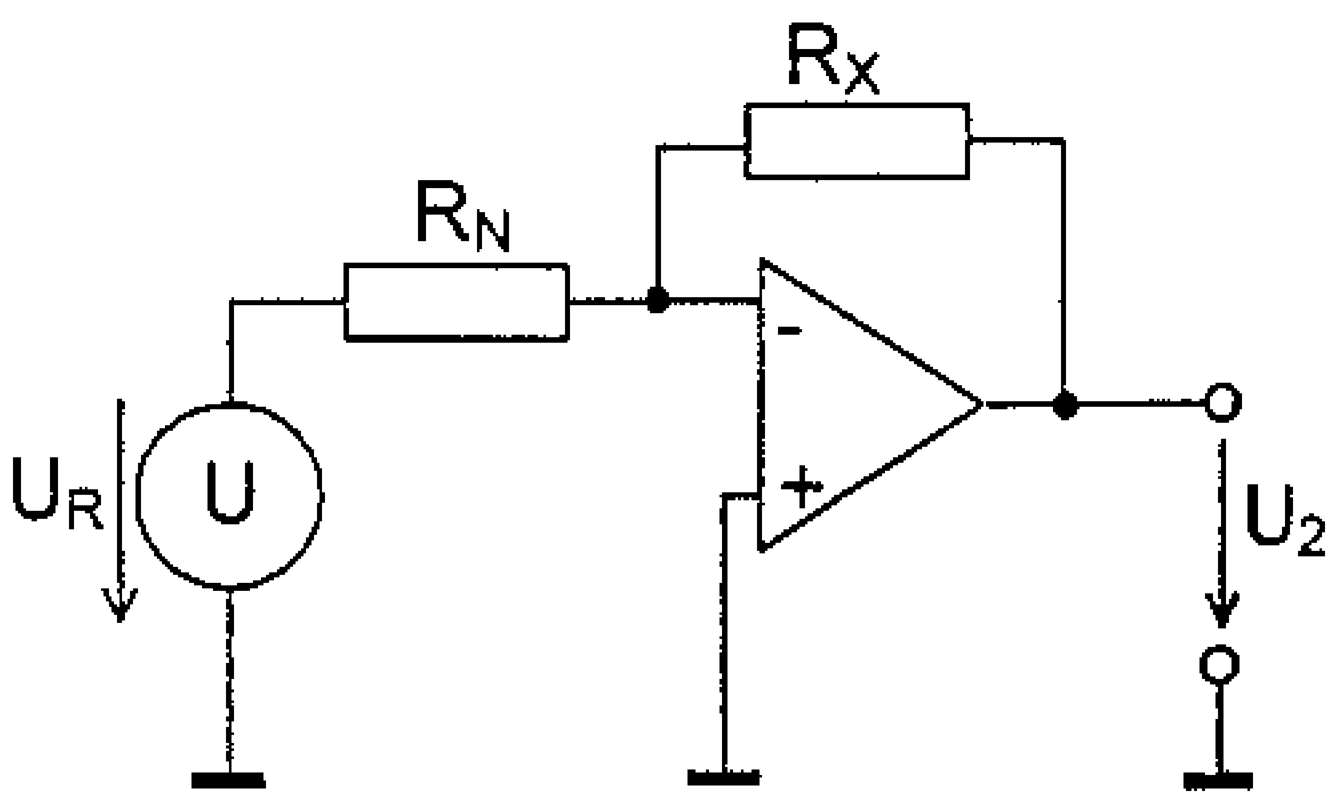
Fázový rozdíl vstupního a výstupního napětí v ustáleném stavu je měřen osciloskopem v režimu X-Y. Jak určíte fázový rozdíl z obrazce, který vznikne na obrazovce? Jaká chyba metody může přitom nastat a jak určíte její velikost? Nakreslete blokové schéma osciloskopu pro měření v tomto režimu.



Obr. 2

Příklad 12.3 **16.9.1999** **celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. obsahující operační zesilovač je použit pro měření neznámého odporu R_X. Vypočtěte velikost odporu R_N tak, aby vznikl převodník R → U s převodem 100 kΩ → 1 V, je-li operační zesilovač ideální a $U_R = 10$ V. Stanovte maximální chybu měření odporu $R_X = 500$ kΩ, je-li přesnost zdroje referenčního napětí 0,1 %, odporu R_N 0,1 % a vstupní klidový proud OZ $|I_0| < 0.01$ μA. Výstupní napětí je měřeno číslicovým voltmetrem s udanou chybou 0,03 % z údaje + 0,01 % rozsahu. Použitý rozsah voltmetru byl 10 V.



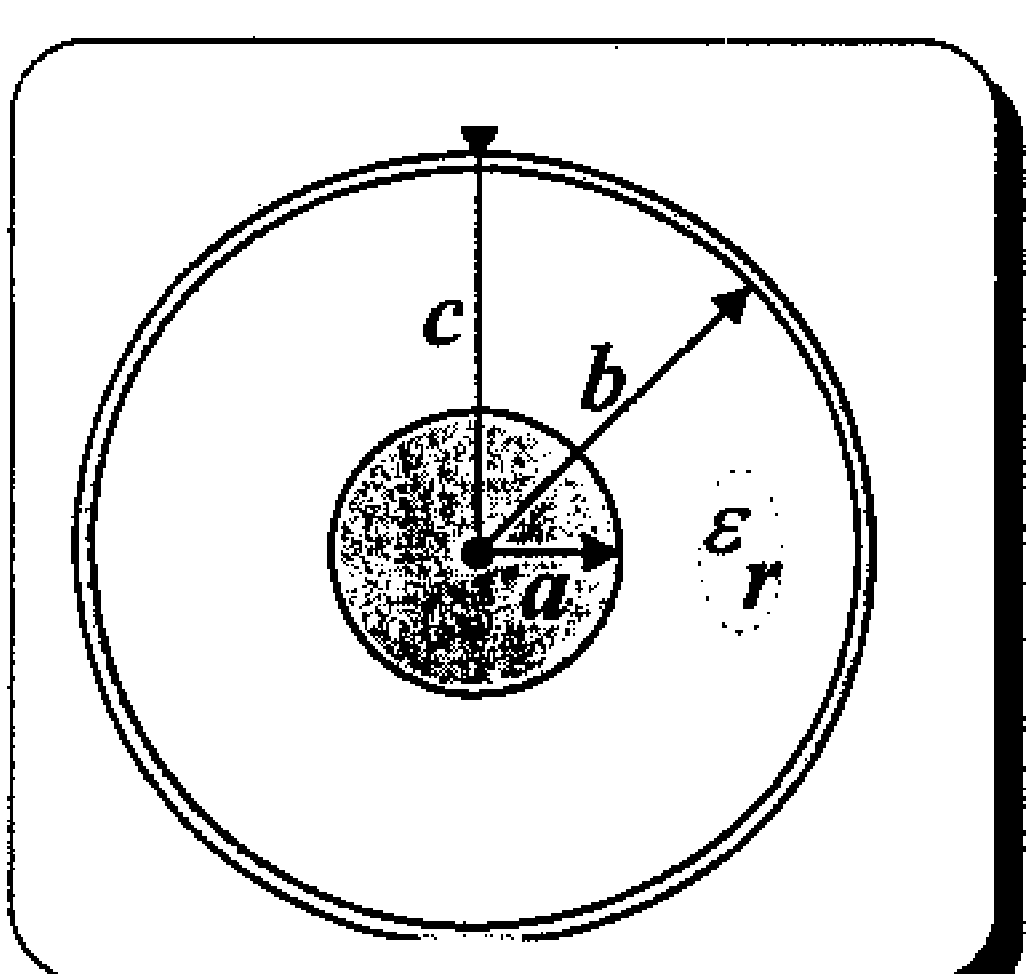
Příklad 12.4 **Celkem 6 bodů**

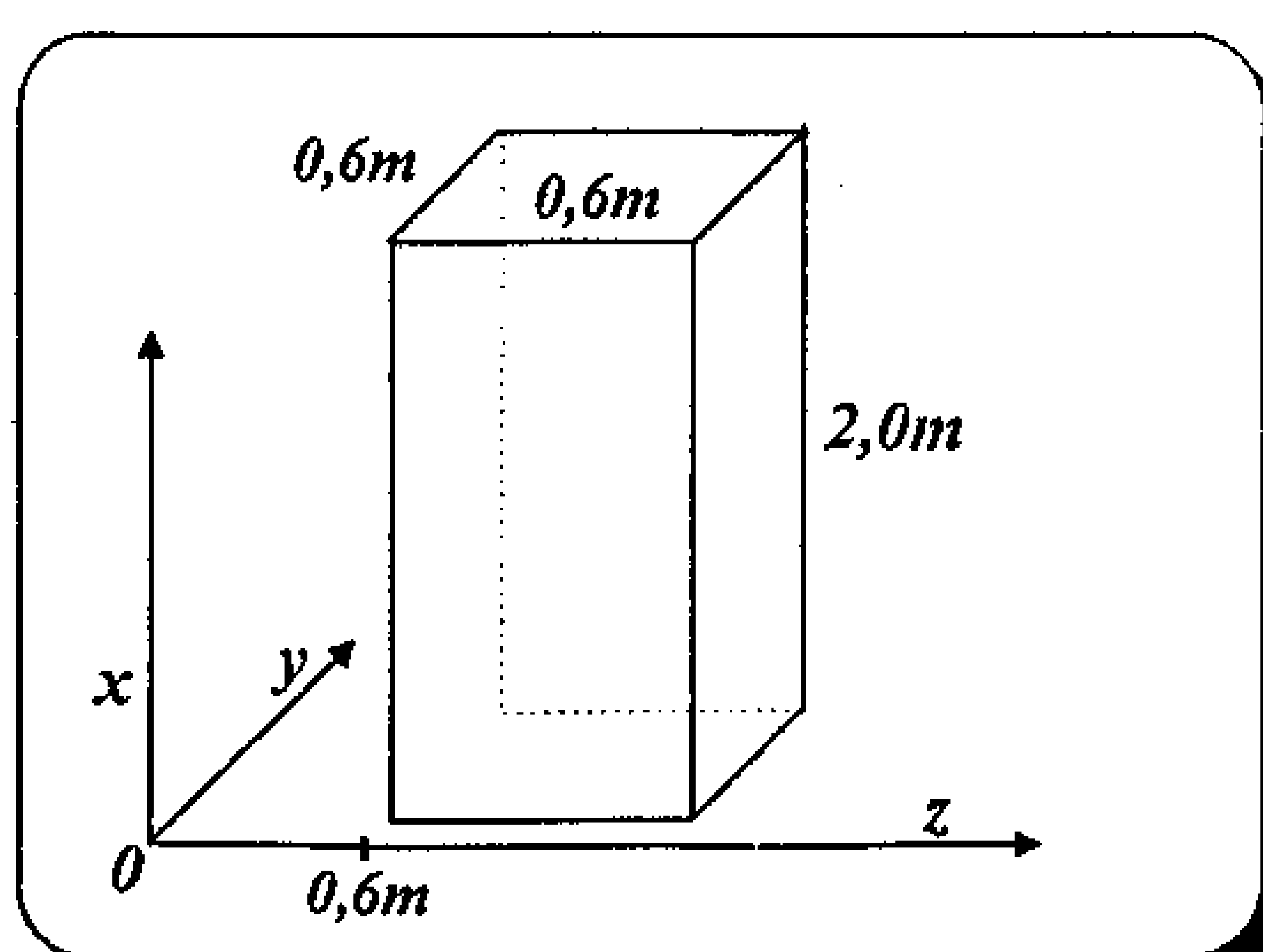
Koaxiální kabel o poloměrech vodičů a = 2 mm a b = 5 mm a vnějším průměru c = 5,05 mm je protékán stejnosměrným proudem I = 1 A. Určete velikost energie magnetického pole v jednom délkovém metru kabelu. Určete indukčnost jednoho délkového metru tohoto kabelu. Určete poměr vnější a vnitřní indukčnosti.

Příklad 12.5 **Celkem 4 body**

Rovinná lineárně polarizovaná elektromagnetická vlna se šíří v kladném směru osy z. E má směr osy x, H směr osy y v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma(\gamma) = 1$ S/m na kmitočtu f = 90 kHz. Počáteční fáze H je $\varphi = 1$ rad a okamžitá hodnota H (t,z) = 5 A/m v čase t = 0 s, v místě z = 0 m. Vypočítejte střední hodnotu výkonu, který se přeměňuje na teplo v objemu dle obr.

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m} \qquad \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} \text{ H/m}$$





Obrázek k příkladu 12.4 nahoře, k příkladu 12.5 vpravo.

16.9.1999

VTP-C12

Výpočetní technika, část VTP

12.1 Zadání (teorie): **1 bod**

Proč musí být v deklaraci typu ukazatel uveden doménový typ?

Protože ukazatel je vázán na dom. typ vázán – překladač musí vědět s jakým typem má co do činění

12.2 Zadání: **1 bod**

Jakým způsobem lze předávat do a z procedury či funkce hodnoty libovolného typu? Pomocí typu POINTER ?

12.3 Zadání (analýza): **2 body**

Napište, co bude na výstupu po provedení následujícího programu.

```
var A, B, C: integer;
procedure Q(var X: integer; Y: integer);
var C: integer;
begin
  C := X; X := Y; Y := C;
end;
begin
  A := 1; B := 3; C := 5;
  Q(A, B);
  writeln(A:2, B:2, C:2);
  Q(B, C);
  writeln(A:2, B:2, C:2);
end.
```

12.4 Zadání (syntéza): **6 bodů**

Napište program, který vytvoří a zobrazí tabulku četnosti tištitelných (>= ' ') znaků v textovém souboru. Jméno souboru přečte program z klávesnice. Počet znaků bude na pěti pozicích, následován procentuálním zastoupením znaku na jedno desetinné místo.

Výpočetní technika, část UPS

12.5 Zadání: **1 bod**

Vysvětlete základní rozdíl mezi kombinačními a sekvenčními obvody.

kombinační – výstup závisí na okamžitém stavu vstupu
sekvenční – // – + vnitřních stavech (paměti)

12.6 Zadání: **2 body**

Vysvětlete funkci následujícího fragmentu programu pro mikroprocesor I8086 a okomentujte jednotlivé instrukce:

```
           ...
           ...
NOVEMAX:   mov   AL,[SI]       AL ← (SI)
           mov   DX,SI         DX ← SI
DALSIPRV:  dec   CX            CX - 1
           jz    KONEC         CX = 0 → KONEC
           inc   SI            SI + 1
           cmp   AL,[SI]       AL = (SI)
           jb    NOVEMAX       AL < (SI) → novemax
           jmp   DALSIPRV
KONEC:     ...
```

Porovnává dva sousední bajty

12.7 Zadání: **2 body**

Charakterizujte mikroprogramový a obvodový řadič. Jaké má vstupy a výstupy? Co je to mikroprogram, jaký má vztah k programu a kde je uložen?

mikroprogramový řadič
– provedení 1 operace např. provedení instrukce sestává z provedení řady dílčích operací – mikrooperací
ty lze zapsat pomocí mikroinstrukcí a ty tvoří mikroprogram
který lze uložit do řídící paměti

8.7.1999

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky. Každý příklad je hodnocen 7 body.

15.1. Příklad: Nalezněte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině

$$M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

15.2. Příklad: Nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic

2

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 4x + 3y + 2e^{-t} \end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty, +\infty)$, s počátečními podmínkami $x(0) = -2,\ y(0) = +2$.

15.3. Příklad: Rozviňte v kosinovou Fourierovu řadu funkci

$$f(t) = 1 - t,\ t \in \langle 0, 1\rangle$$

a načrtněte graf součtu této řady pro $t \in \langle -2, 2\rangle$.

15.4. Příklad: Najděte všechna komplexní z, pro která

$$\sin(z + \frac{\pi}{4}) - \cos(z + \frac{\pi}{4}) = j$$

15.5. Příklad: Házíme symetrickou mincí. Nechť X_1 značí počet hodů dokud nepadne poprvé rub.

a) Určete rozdělení náhodné veličiny X_1.

b) Nechť X_k značí počet hodů od $k-1$ padnutí rubu do k-tého padnutí rubu v sérii hodů. Jaká je $E(X_k)$?

c) Vypočtěte střední hodnotu počtu hodů potřebných pro celkem k rubů.

První souborná zkouška - FYZIKA 8.7.1999

15.1

Těleso urazilo volným pádem (bez tření) dráhu h.

a) Rozdělte tuto dráhu na 5 částí, které mají tu vlastnost, že doba potřebná k jejich proběhnutí byla ve všech případech stejná.

b) Čemu se rovná tato doba?

Odpor prostředí neuvažujte. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ m\ s^{-2}$

(max. 8 bodů)

15.2

a) Popište jev interference světla a vysvětlete jeho příčiny.

b) Sluneční světlo se odráží pod úhlem $\alpha = 45°$ od tenké vrstvy oleje plovoucí na hladině vody. Spočítejte, které vlnové délky světla ve viditelné oblasti jsou v odraženém světle nejvíce zesíleny. Tloušťka vrstvy $d = 1\ \mu m$, index lomu oleje $n_o = 1{,}45$ a index lomu vody $n_v = 1{,}33$. Viditelné světlo má vlnové délky od $450\ nm$ do $720\ nm$.

(max. 7 bodů)

Příklady řešte napřed obecně, pak dosaďte číselné hodnoty (pokud byly zadány); výsledky vyznačte dvojitým podtržením. U výsledků vždy napište i jejich rozměr v jednotkách soustavy SI.

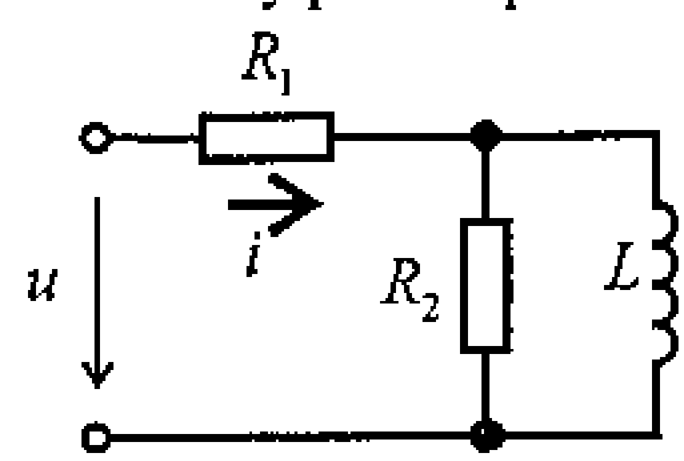
Některé základní fyzikální konstanty

Planckova konstanta	$h = 6{,}63.10^{-34}\ J.s$	*náboj elektronu*	$e = 1{,}6.10^{-19}\ A.s$
gravitační konstanta	$\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$	*klidová hmotnost elektronu*	$m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$
rychlost světla ve vakuu	$c = 3{,}00.10^8\ m/s$	*klidová hmotnost protonu*	$m_p = 1{,}67.10^{-27}\ kg$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38.10^{-23}\ J/K$	*molární plynová konstanta*	$R_m = 8{,}3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022.10^{23}\ mol^{-1}$	*Stefanova-Boltzmannova konst.*	$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 15. 1 **Celkem 7 bodů**

Obvod podle *obr. 1* je napájen ze zdroje napětí $u(t) = 5 + 8 \sin(1000\,t)$ [V].
Vypočítejte časový průběh proudu $i(t)$ a jeho efektivní hodnotu I v ustáleném stavu, je-li $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $L = 0.06667$ H.
Uveďte možnosti měření efektivní hodnoty proudu pro tento případ.



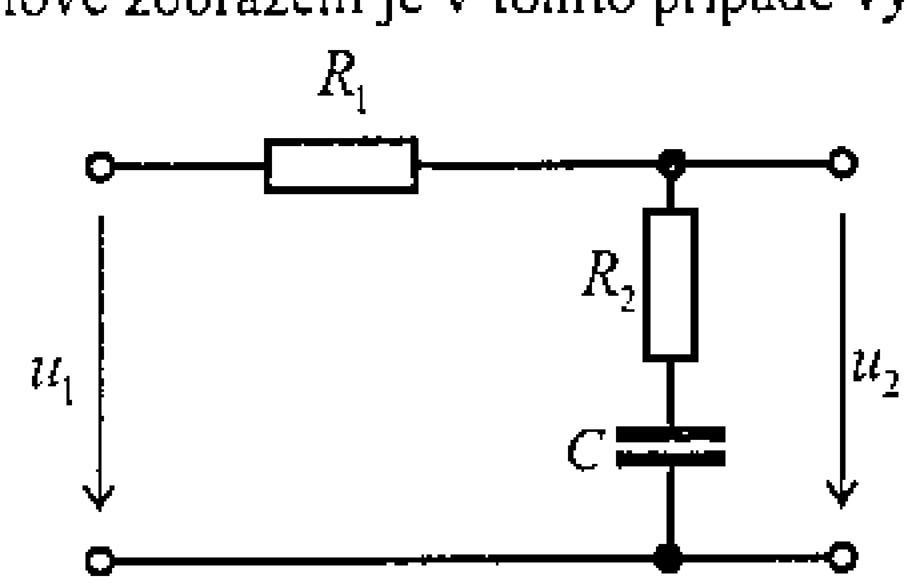
Obr. 1

Příklad 15. 2 **Celkem 11 bodů**

Obvod podle *obr. 2* se v čase $t = 0$ připojí na zdroj obdélníkového napětí $u_1(t)$ o kmitočtu f=100 kHz, pro nějž platí

$u_1(t) = 10$ V for $0 < t < 5$ μs
$u_1(t) = 0$ V for $5 < t < 10$ μs

Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ v první půlperiodě budicího signálu (pro $0 < t < 5$ μs), byl-li obvod pro $t = 0$ bez akumulované energie. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2 = 250\ \Omega$, $C = 1000$ pF,. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor.
Průběhy napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$ mají být zobrazeny dvoukanálovým analogovým osciloskopem. Nakreslete blokové schéma vysvětlující princip dvoukanálového osciloskopu. Který režim činnosti umožňující dvoukanálové zobrazení je v tomto případě výhodnější použít a proč?

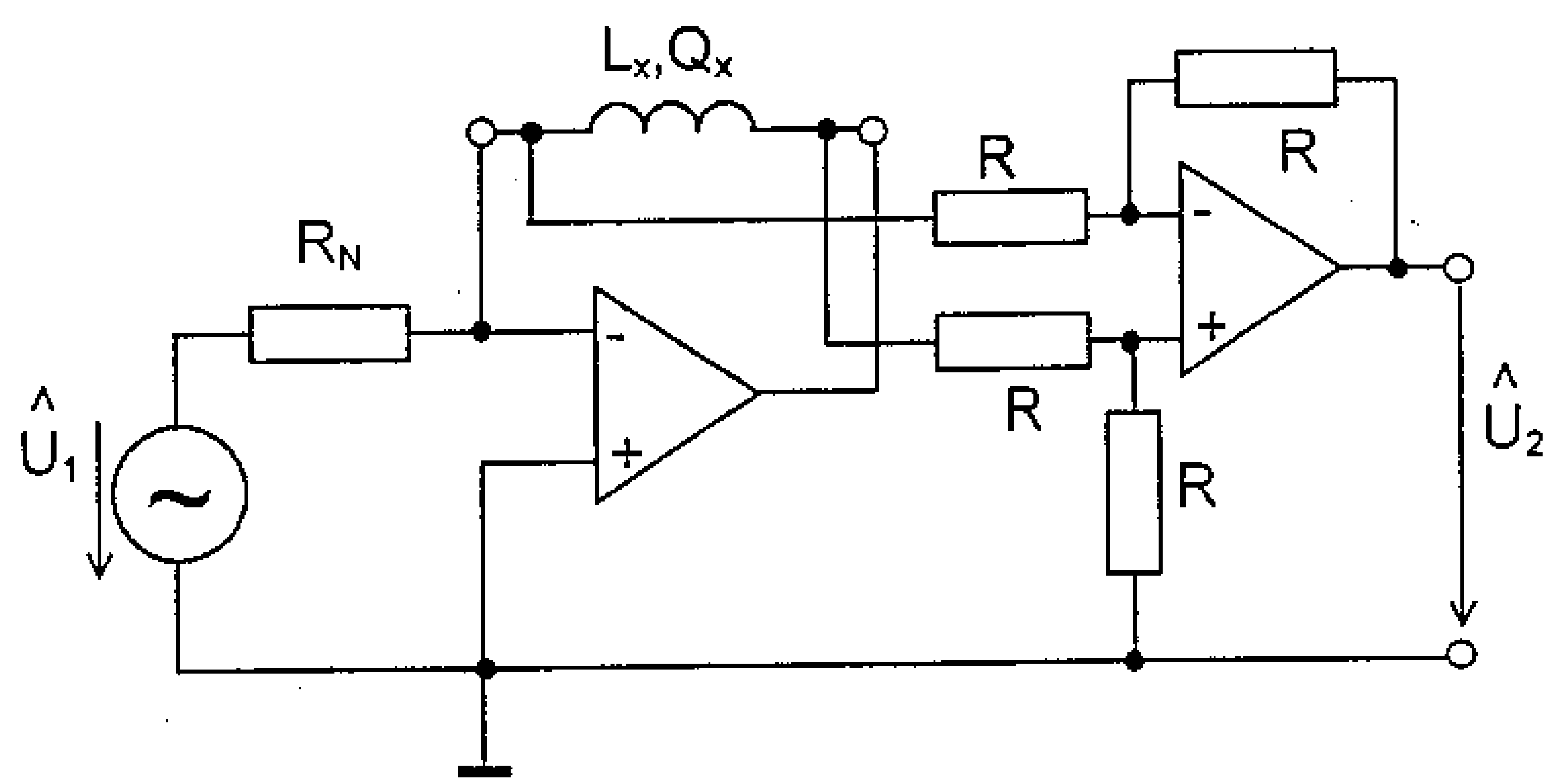


Obr. 2

8.7.1999

Příklad 15.3 **celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. je použit pro měření indukčnosti a činitele jakosti cívky reprezentované seriovým spojením induktoru L_X a resistoru R_X. Vypočtěte přenos daného obvodu $P(j\omega) = U_2/U_1$ a nakreslete jeho asymptotické kmitočtové charakteristiky v logaritmických souřadnicích. Určete L_X a R_X měřené cívky (seriové náhradní schema), je-li hodnota referenčního rezistoru $R_N = 10\ k\Omega$, referenční napětí $U_1 = 1.00$ V, použitý kmitočet 1591,5 Hz a vektorvoltmetrem bylo změřeno výstupní napětí $U_2 = -0{,}05 - j0{,}50$ V. Dále určete hodnotu činitele jakosti měřené cívky Q_X.



Příklad 15.4 — Celkem 6 bodů

Dva přímé, rovnoběžné, dlouhé vodiče kruhového průřezu o poloměru a = 1 mm a vzájemné vzdálenosti d = 0,1m jsou umístěny ve vakuu a tvoří vedení, kterým do zátěže protéká proud I. Určete hodnotu rezistoru zakončujícího vedení tak, aby výslednice sil působených elektrostatickým a magnetickým polem byla nulová. Víme přitom, že velikost proudu I v každém z vodičů je rovna 3/4 A. Určete napětí U mezi vodiči a velikost intenzity elektrického pole E na povrchu vodičů.

Příklad 15.5 — Celkem 4 body

Rovinná lineárně polarizovaná elektromagnetická vlna se šíří v kladném směru osy z na kmitočtu f = 10 MHz v prostředí $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma(\gamma) = 3$ S/m. V čase t = 0 s a v místě z = 0 m má intenzita magnetického pole záporné minimum H = - 0,001 A/m. Vypočítejte okamžité hodnoty E a H v čase t = 1 μs a v místě z = 0,1 m. $\vec{E}$ má směr osy x, $\vec{H}$ směr osy y.

$\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}$ F/m $\qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m

Výpočetní technika, část VTP

15.1 Zadání (teorie): 1 bod

Jak se vytváří a k čemu slouží Boolské výrazy v jazyce Pascal?

log.operace definované nad proměnnými typu boolean ..

15.2 Zadání: 1 bod

Popište strukturu příkazů **if-then-else** a **case** syntaktickým diagramem a určete, kdy se který příkaz používá.

15.3 Zadání (analýza): 2 body

Vyjádřete stručně a výstižně operaci prováděnou následující procedurou.

```
type
  TIndex   = 1..100;
  TMyArray = array [TIndex] of integer;                    :integer
procedure TEST (var A:MyArray; var N:TIndex; var K);
var I:TIndex;
begin
  K:=0;
  for I:=1 to N do
  begin
    if odd(I) then A[I]:=A[I]+1;
    K:=K+A[I]
  end;
  K:=K - N div 2
end;
```

15.4 Zadání (syntéza): 6 bodů

1. Napište proceduru, které zjistí, zda daná čtvercová matice je symetrická.
2. Napište proceduru, které zjistí, zda daná čtvercová matice je horní trojúhelníková.

Procedury použijte v hlavním programu.

```
int hisrect (int mat [3][3])
{ isrect = true;
  for(i=0; i<3 ;i++)
   for(j=0;j<3 ;j++)
     if((mat[i][j] != 0) && (i>j))
        isrect=false;
}
```

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ pro $i > j$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{12} = a_{21}$

$\cancel{a_{21} = a_{12}}$

$a_{13} = a_{31}$

$\cancel{a_{31} = a_{13}}$

$a_{23} = a_{32}$

$\cancel{a_{32} = a_{23}}$

8.7.1999 **UPS-C15**

Výpočetní technika, část UPS

15.5 Zadání: **1 bod**

Uveďte registry mikroprocesoru I8086 a stručně charakterizujte jejich účel a způsob používání. DS, SS, ES, CS, AX, BX, CX, DX, DS, SI, SP, BP, IP

15.6 Zadání: **2 body**

Co jsou desítkové kódy? Který z nich je nejpoužívanější? Jak jsou v něm číslice zobrazeny? Na jakém principu je v tomto kódu založena sčítačka pro jeden desítkový řád? BCD $2^k > 10$, Gray $y = a + b + p$ $y \geq 10$ $\Rightarrow p = 1$

+3,

15.7 Zadání: **2 body**

Uveďte typickou hierarchii paměťového systému počítače. Jaké ekonomické důvody vedou k tomu, že je vhodné konstruovat paměťový systém počítače hierarchicky? Vysvětlete pojem virtuální paměť.

cena paměti přímo úměrná kapacitě, nepřímo době přístupu

typ paměti

registry	klopné obvody
vyrovnávací	SRAM
hlavní	DRAM
vnější	HDD
záložní	TAPE

virtuální paměť

systém několika pamětí s různými parametry, (kapacita, rychlost), který je řízen tak aby vytvářel potřebné pam. prostory pro programy a data

17.4.1999

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

4.1. Určete řešení soustavy diferenciálních rovnic

2

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x + 2e^t, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

5 bodů

4.2. Příklad: Pro periodickou funkci f platí:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k^3} \cos(k\pi t) - \frac{4}{k^4+1} \sin(k\pi t) \right).$$

Určete 2. harmonickou funkce f' a její amplitudu.

5 bodů

4.3. Příklad: Prověřte, které z bodů $A = [1,1]$, $B = [-1,-1]$, $C = [0,0]$ jsou stacionární body funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

a vypočtěte, zda v nich funkce f má lokální extrém. Určete typ extrému.

10 bodů

4.4. Příklad: Najděte všechna $z \in C$ vyhovující rovnici

$$\cosh(\mathrm{j}\, z + \ln 2) + \mathrm{j} \sin(z - \mathrm{j} \ln 2) = 2\,\mathrm{j}\,.$$

5 bodů

4.5. Příklad: Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Veličina X, resp. Y má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} cx(4-x) & \text{pro x} \in \langle 0,4 \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{array} \right.$$

$$\text{resp.} \quad g(y) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{1}{2}y & \text{pro y} \in \langle 0,2 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{array} \right.$$

Stanovte:

a) konstantu c,

b) sdruženou distribuční funkci veličin X a Y,

c) pravděpodobnost $P\left(X^2 - 4X + Y^2 \leq 0\right)$.

10 bodů

17.4.1999

První souborná zkouška - FYZIKA

4-1

Nabitá částice se pohybuje v homogenním magnetickém poli o indukci B = 0,5 *T* po kružnici o poloměru R = 4,15 *cm* rychlostí $v = 10^6$ *m/s*. Určete

a) velikost náboje částice, známe-li energii částice: W = 20,75 *keV*,

b) velikost a směr síly, kterou na částici působí uvedené magnetické pole.

Je dána velikost elektrického náboje elektronu: $e = 1{,}6.10^{-19}$ *As*.

(max. 8 bodů)

4-2

Určete změnu entropie 1 kg dusíku, byl-li ohřát z teploty 5 °C na teplotu 55 °C

a) izochoricky

b) adiabaticky.

Měrná tepelná kapacita dusíku $c_V = 740$ *J/kg.K*

(max. 7 bodů)

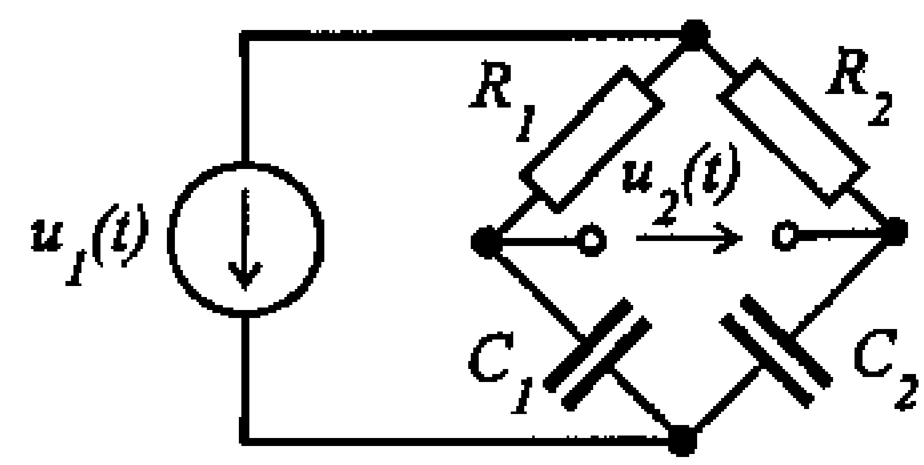
TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 4.1 **Celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje periodického napětí $u_1(t) = 5 + 10 \sin(1000\, t)$ [V]

Vypočtěte pro ustálený stav časový průběh napětí $u_2(t)$ na druhé diagonále můstku a jeho efektivní hodnotu, je-li $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $C_1 = 5\ \mu F$, $C_2 = 20\ \mu F$.

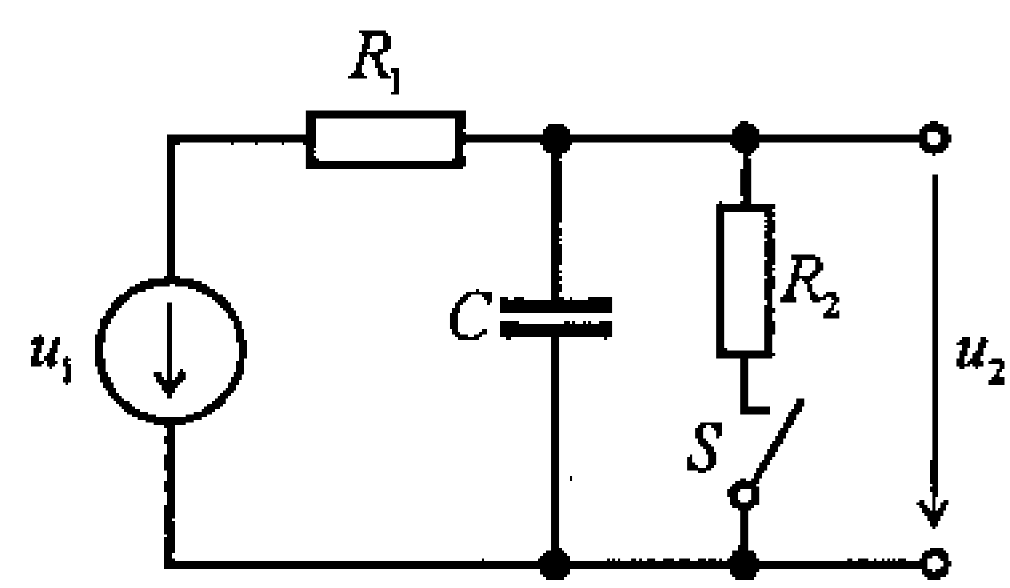
Uveďte možnosti měření kmitočtu napájecího napětí včetně dosažitelné přesnosti měření pro jednotlivé metody (řádově).



Obr. 1

Příklad 4. 2 **Celkem 11 bodů**

Obvod podle obr. 2 napájený zdrojem napětí $u_1(t) = 10 \sin(1000\, t)$ byl pro $t < 0$ v harmonickém ustáleném stavu. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro $t > 0$, jestliže se v čase $t = 0$ sepne spínač S. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2 = 500\ \Omega$, $C = 0.5\ \mu F$. Fázový rozdíl vstupního a výstupního napětí v ustáleném stavu je měřen číslicovým fázoměrem. Nakreslete jeho blokové schéma a načrtněte typické průběhy signálu na výstupu jednotlivých bloků.

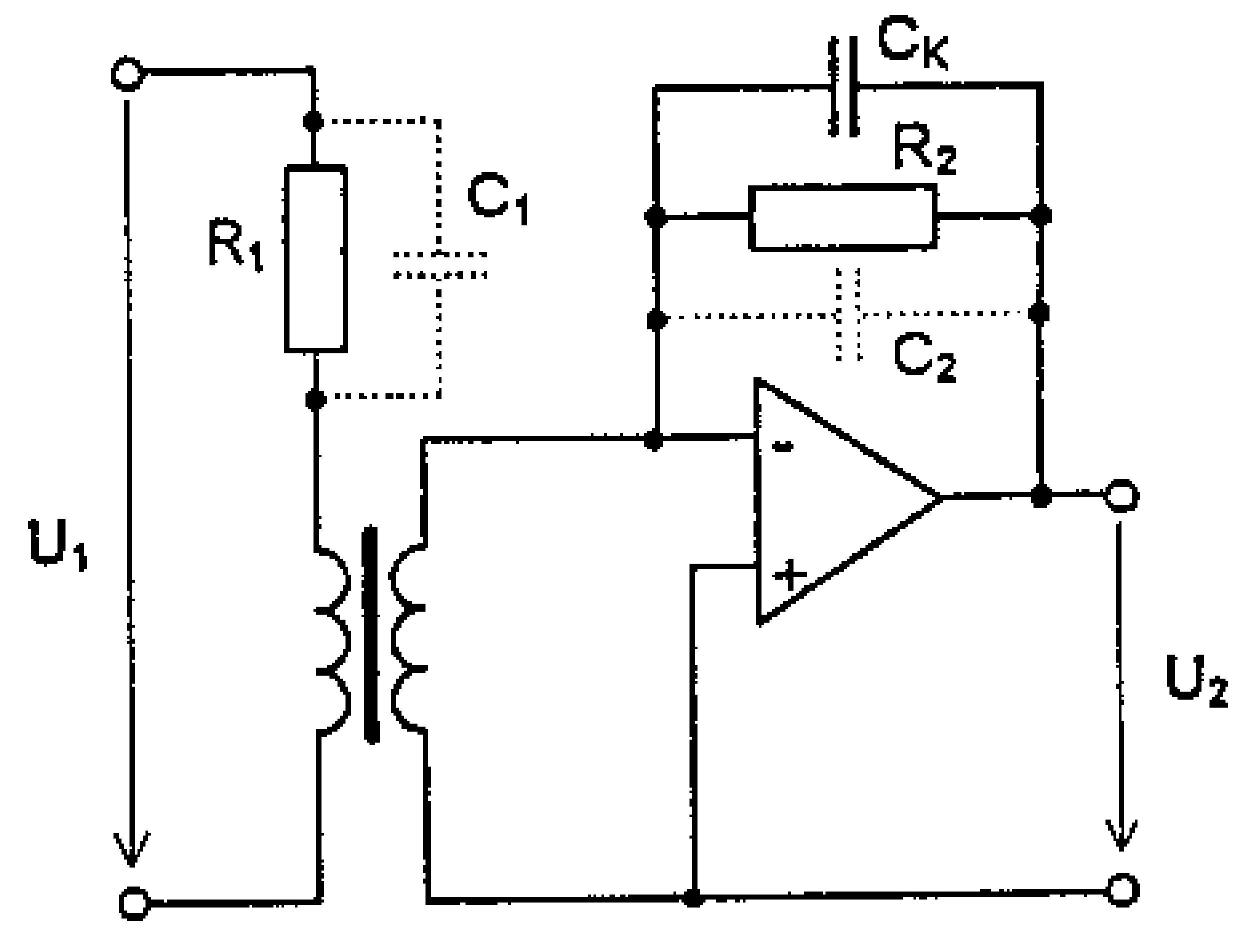


Obr. 2

17.4.1999

Příklad 4. 3 celkem 7 bodů

Obvod podle obr. s ideálním operačním zesilovačem a s ideálním proudovým transformátorem s převodem 5 mA / 5 mA má být použit jako vstupní napěťový obvod číslicového wattmetru. Určete přenos napětí $P(j\omega) = U_2 / U_1$ tohoto měřicího zesilovače, mají-li použité rezistory hodnoty odporu $R_1 = 0{,}1\ \mathrm{M\Omega}$, $R_2 = 1\ \mathrm{k\Omega}$ a pro jejich parazitní kapacity platí $C_1 = C_2 = 20\ \mathrm{pF}$. Nakreslete asymptotické kmitočtové charakteristiky tohoto obvodu v logaritmických souřadnicích (bez kompenzačního kapacitoru C_k). Vypočítejte kapacitu kompenzačního kapacitoru C_k, který je nutno připojit paralelně k odporu R_2, tak, aby přenos daného obvodu byl kmitočtově nezávislý. Vypočítejte max. možnou chybu modulu přenosu daného zapojení (s kompenzačním kapacitorem C_k), je-li chyba všech použitých rezistorů menší než 0,1%.



Příklad 4.4 Celkem 4 body

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu $f = 100$ MHz se šíří v kladném směru osy z v prostředí s parametry: $\varepsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$, $\sigma = \omega\varepsilon$. Vypočítejte střední hodnotu Poyntingova vektoru, je-li v čase $t = 0$ s a v místě $z = 0$ m intenzita elektrického pole maximální o hodnotě $E_{max} = 10^{-2}$ V/m.

Příklad 4.5 Celkem 6 bodů

Vypočítejte, jak velké napětí se indukuje v závitu umístěném ve vzduchu (viz obrázek).

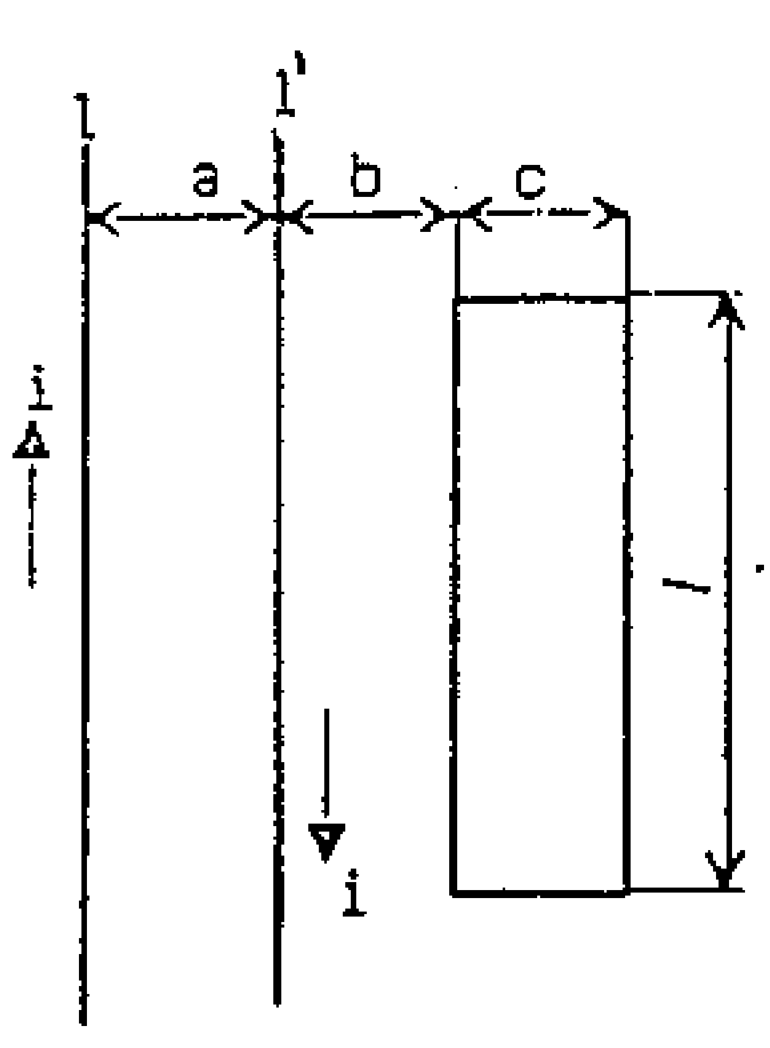
$a = 60$ mm

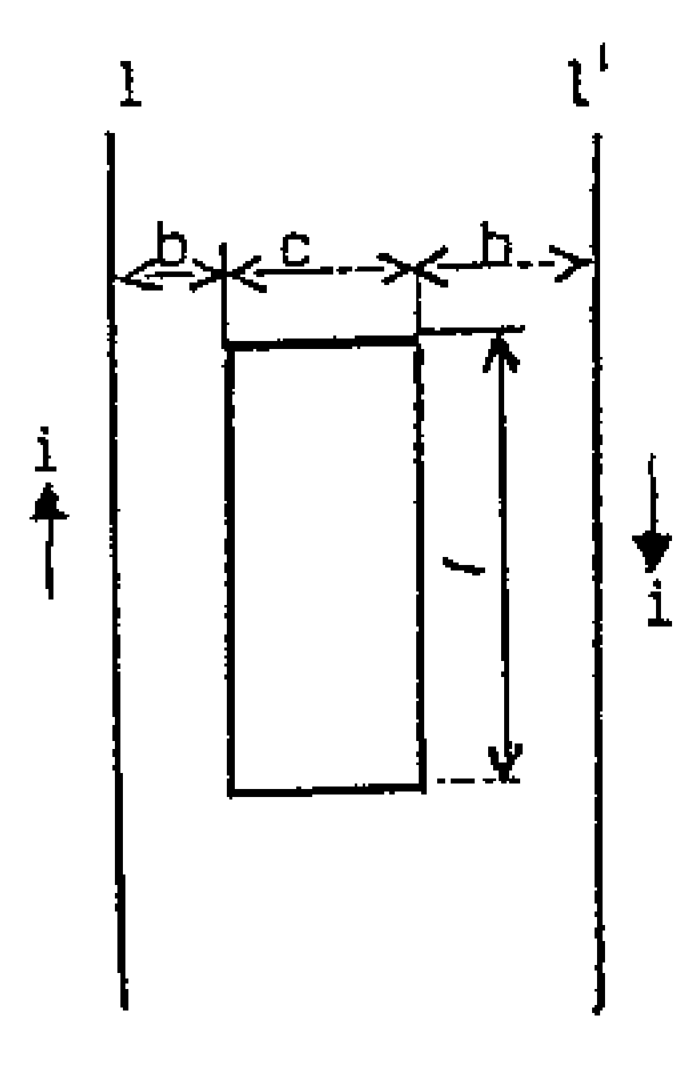
$b = 10$ mm $\qquad \varepsilon_0 = 8{,}855 . 10^{-12} \doteq \frac{10^{-9}}{36\pi} [F/m] \qquad \mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ [H/m]

$c = 40$ mm

$l = 10$ cm

Vedením 11′ protéká proud $i = 10^{-2} \sin(314\,t + \pi/4)$ [A].





17.4.1999

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie — 7 bodů

4.1 Zadání:

Uveďte význam části **interface** a **implementation** v definici modulu v TurboPascalu interface – deklarace vnější
implementation – vlastní definice

4.2 Zadání:

Posloupnost celých čísel lze v Pascalu ukládat do pole, ale také např. do jednosměrně zřetězeného spojového seznamu. Který z těchto způsobů je paměťově výhodnější? Který je výhodnější s ohledem na přístup k libovolnému prvku posloupnosti v náhodném pořadí?

Pole se skládá z pevného počtu položek, seznam ne
Přístup do pole je rychlejší (neprochází se seznamem)

4.3 Zadání:

Způsoby přenosu zpráv v sítích typu WAN (Wide Area Network): vysvětlete rozdíl mezi přepojováním kanálů a přepojováním paketů. Co jsou virtuální spoje a co datagramová služba. Jak je zabezpečen spolehlivý přenos paketů?

kanál – jednou sestavená cesta

4.4 Zadání:

Jaké typy dat se ukládají do hlavní paměti? Co je reprezentace dat označovaná *little endian* a *big endian*? Jak se z výpisu paměti pozná, co je instrukce a co data a jakého typu jsou příp. data? (Kromě výpisu nejsou k dispozici žádné další informace.) 1234ABCD

0	12	CD
1	34	AB
2	AB	34
3	BE	LE

4.5 Zadání:

Co jsou to příznaky (flags) a jak se využívají při programování ve strojovém kódu? stav určen výsledky aritm. operací

Analýza — 2 body

4.6 Zadání:

Jaký bude výstup následujícího programu?

```
program TEST2;
  var A : array [1..3, 1..3] of char;
      C : char;
      I,J : 1..3;
  begin
     for J:=1 to 3 do A[1,J]:=chr(ord('A')+J);
     for I:=2 to 3 do A[I]:=A[I-1];
     for I:=1 to 3 do
```

```
      for J:= 1 to 3 do
       begin
          C:=A[I,J];
          A[I,J]:=A[J,I];
          A[J,I]:=C
       end;
     for I:=1 to 3 do
     begin
        WritelLn;
        for J:= 1 to 3 do Write(A[J,I]:3)
     end
  end.
```

Syntéza 6 bodů

4.7 Zadání:

Hodnoty typu **integer** v rozsahu od -9 999 do 9 999 jsou uložené ve vnitřní reprezentaci v souboru. Sestavte proceduru, která pro vstupní soubor určený parametrem spočítá četnosti výskytu hodnot v intervalech s krokem 1000, tj. určí hodnoty posloupnosti `C` definované takto:

C_1 : počet čísel z intervalu <-9999,-9000>
C_2 : počet čísel z intervalu <-8999,-8000>

C_{10} : počet čísel z intervalu < -999, -1>
C_{11} : počet čísel z intervalu < 0, 999>
C_{12} : počet čísel z intervalu < 1000, 1999>

C_{19} : počet čísel z intervalu < 8000, 8999>
C_{20} : počet čísel z intervalu < 9000, 9999>

Posloupnost `C` uloží procedura do parametru typu pole celočíselných prvků příslušné délky.

Naznačte možné použití této procedury v hlavním programu, v němž do souboru uložíte 5000 náhodně vygenerovaných čísel z daného rozsahu a výslednou posloupnost `C` zobrazíte na obrazovce.

Poznámka: Funkce `Random(N)` vygeneruje náhodné číslo z intervalu $< 0, N-1 >$.

21.11.1998

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

7.1. Pro $t \in (0, \infty)$ určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} + x = f(t), \qquad x(0_+) = 3,$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro} \quad t \in (0,1), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

5 bodů

7.2. Příklad: Určete 1. harmonickou funkce, která je periodickým prodloužením funkce f, kde

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

5 bodů

7.3. Příklad: Vypočtěte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

10 bodů

7.4. Příklad: Ukažte, že rovnice

$$4\cos z + \sin z = 1$$

má pro $z \in C$ jenom reálná řešení. Řešení najděte.

5 bodů

7.5. Příklad: Náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x + 2y + 1) & \text{pro } x \in \langle 0,3\rangle,\ y \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Stanovte:
a) konstantu k,
b) pravděpodobnost $P(X \le Y + 1)$,
c) střední hodnoty $E(X)$ a $E(XY)$,
d) rozptyl $D(X)$.

10 bodů

První souborná zkouška - FYZIKA

7-1

a) Definujte fyzické kyvadlo!

b)Je dána homogenní přímá tyč o délce $l = 1\ m$. Určete, v jaké vzdálenosti x od středu tyče má být bod závěsu, aby se tyč zavěšená v tomto bodě kývala jako fyzické kyvadlo s minimální dobou kyvu. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose k ní kolmé a procházející těžištěm je $J_o = m\, l^2 /12$.

(max. 8 bodů)

7-2

a) Formulujte a vysvětlete vztahy, popisující vyzařování absolutně černého tělesa.

b) Z Planckova vztahu pro spektrální hustotu zářivosti

$$H_{e\lambda} = f(\lambda, T) = C_1/ \lambda^5(\exp(C_2 /\lambda T) - 1)$$

odvoďte Stefanův - Boltzmannův zákon.

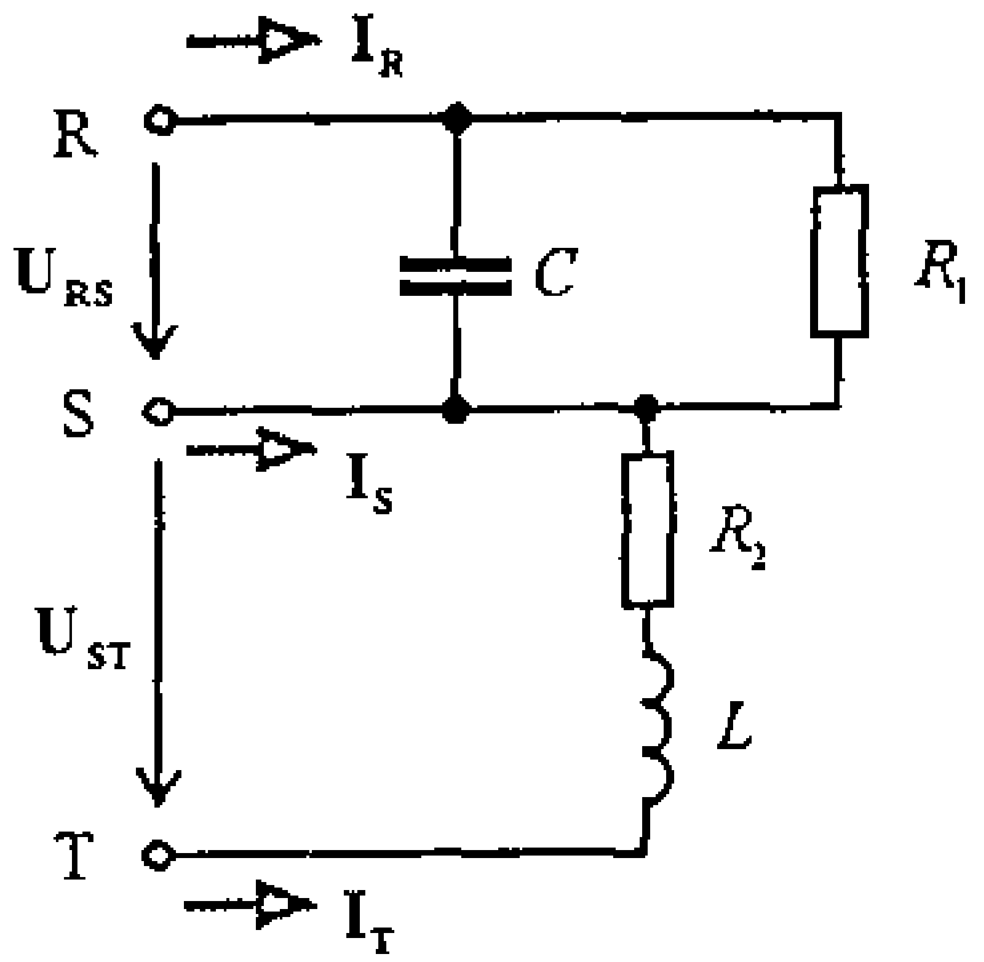
(max. 7 bodů)

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 7. 1 **Celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. 1 je napájen z trojfázového zdroje, jehož fázory napětí v měřítku efektivních hodnot jsou U_{RS} = 380 V, $U_{ST} = 380\, e^{-j2\pi/3}$. Vypočítejte fázor proudu I_T a celkový činný výkon obvodu, je-li R_1 = 30 Ω, R_2 = 20 Ω, L = 0,06366 H, C = 159,15 μF.

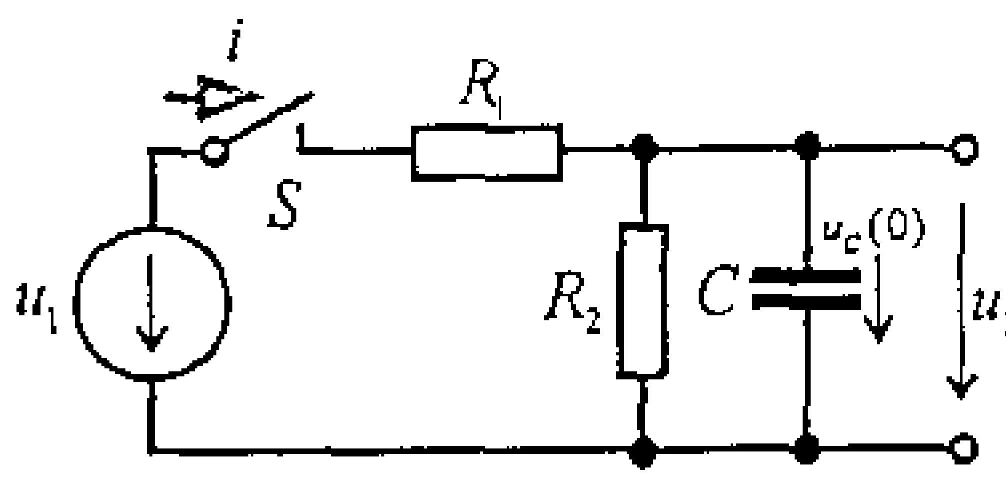
Nakreslete zapojení wattmetrů pro měření činného výkonu dané nesouměrné zátěže a uveďte vztah pro určení celkového činného výkonu z údajů jednotlivých wattmetrů..



Obr. 1

Příklad 7. 2 **Celkem 11 bodů**

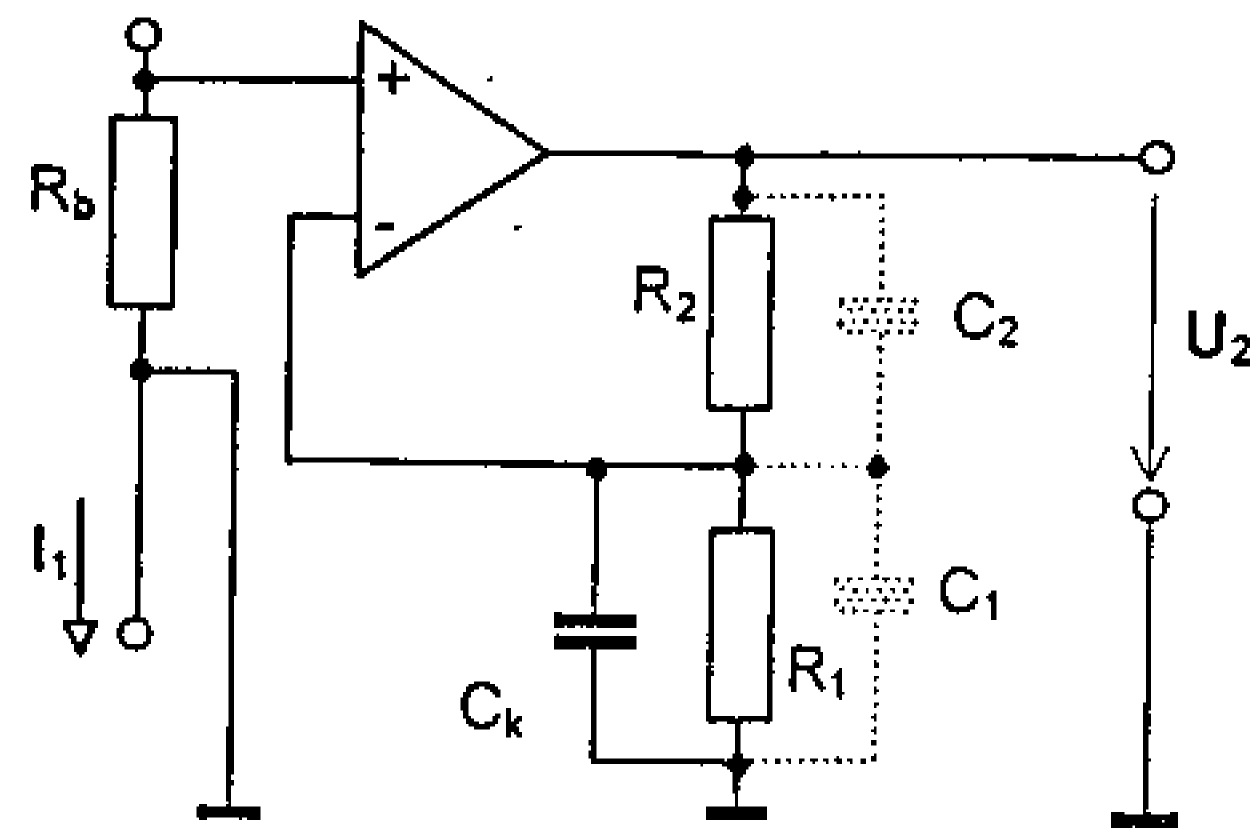
Obvod podle obr. 2 se v čase t = 0 připojí na zdroj harmonického napětí $u_1(t) = 10 \sin(100000\, t)$ [V]. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro t > 0, byl-li kapacitor pro t < 0 bez náboje. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2$ = 1 kΩ, C = 10000 pF. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor. Výstupní napětí je po sepnutí spínače S zobrazeno na osciloskopu s číslicovou pamětí. Nakreslete jeho blokové schéma, popište princip činnosti a režimy spouštění „pretrigger“ a „delay“ (způsoby ukládání vzorků do paměti).



Obr. 2

Příklad 7. 3 21.11.1998 celkem 7

Obvod podle obr., tvořený koaxiálním bezindukčním bočníkem a neinvertujícím zesilovačem s i operačním zesilovačem, má být použit jako vstupní proudový obvod číslicového wattmetru. Vypo přenos $P(j\omega) = U_2 / I_1$ a nakreslete asymptotické kmitočtové charakteristiky obvodu v logaritmických souřadnicích (bez kompenzačního kapacitoru C_k), je-li odpor bočníku R_b=0,01Ω, a zpětnovazební odpory R_1 = 1 kΩ a R_2 = 99 kΩ s parazitními kapacitami $C_1 = C_2$ = 20 pF. Vypočítejte kapacitu kompenzačního kapacitoru C_k, který je nutno připojit paralelně k odporu R_1, tak, aby přenos daného obvodu byl kmitočtově nezávislý. Vypočítejte max. možnou chybu modulu přenosu daného zapojení (s kompenzačním kapacitorem C_k), je-li chyba všech použitých rezistorů menší než 0,1%.



Příklad 7.4 Celkem 6 bodů

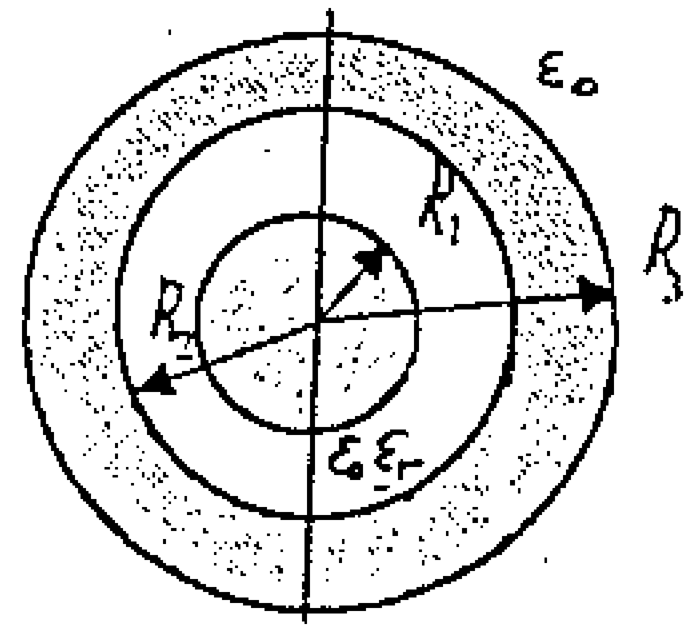
Vodivá koule o poloměru R_1 = 5 mm je nabita nábojem $Q_0 = 2.10^{-9}$ C a je soustředně umístěna v duté vodivé kouli o poloměrech R_2 = 15 mm a R_3 = 20 mm. V prostoru mezi koulí o poloměru R_1 a vnitřní plochou duté koule o poloměru R_2 je dokonalé dielektrikum s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 2$. Vně celého uspořádání je permitivita $\varepsilon = \varepsilon_0$ (viz obr.).

Vypočítejte: 1/ potenciál ve všech oblastech, tj. $r \le R_1$; $R_1 \le r \le R_2$; $R_2 \le r \le R_3$, $r \ge R_3$

2/ intenzitu elektrického pole tamtéž.

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \quad F/m$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad H/m$$



Příklad 7.5 Celkem 4 body

Určete směr a časový průběh síly, která působí na dva velmi dlouhé přímé rovnoběžné vodiče protékané proudem I = 1000 sin(314 t) [A]. Vzdálenost mezi vodiči je a = 30 cm a jsou umístěny ve vzduchu. Řešení hledejte pro případ, kdy proudy procházejí vodiči:

a/ opačnými směry

b/ stejnými směry.

21.11.1998

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie 7 bodů

7.1 Zadání:

Jakým způsobem lze předávat do a z procedury či funkce hodnoty libovolného typu? pomocí typu pointer

7.2 Zadání:

Jaký je rozdíl mezi textovým souborem a datovým souborem?

textový soubor má def. znaky pro konce řádky a jsou nadání def. další fce

7.3 Zadání:

Co je stránkování a jak se realizuje? Vysvětlete pojmy *virtuální adresový prostor, fyzický adresový prostor, stránka, stránkový rámec.* Kde je uložena tabulka stránek?

7.4 Zadání:

Vysvětlete rozdíl mezi logickými obvody se standardním výstupem, třístavovým výstupem a s výstupem s otevřeným kolektorem.

7.5 Zadání:

Vysvětlete význam segmentových registrů CS, SS, DS a ES procesoru 8086. Na příkladu jednoho z nich, který si vyberete, naznačte jejich použití.

Analýza 21.11.1998 2 body

7.6 Zadání:
Co dělá následující funkce?

```
function CONVERT(CH:char):char;
     begin
       if (CH >= 'a') and (CH <= 'z')
           then CONVERT:= CHR(ORD(CH) - ORD('a') + ORD('A'))
           else CONVERT:= CH
     end;
```

Syntéza 6 bodů

7.7 Zadání:
Napište program, který zkopíruje vstupní textový soubor do výstupního souboru, přičemž z každé skupiny po sobě jdoucích stejných písmen (na velikosti přitom nezáleží) vypíše pouze první písmeno.

Příklad vstupního souboru:

```
aAa  123341
bbBbcdEEe
```

Odpovídající výstup:

```
a  123341
bcdE
```

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

3.1. Určete řešení lineární diferenciální rovnice
1

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 3e^{2t} + t$$

s počátečními podmínkami $x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 4.$

5 bodů

3.2. Příklad: Určete komplexní tvar Fourierovy řady funkce, která je periodickým prodloužením funkce f, kde

$$f(t) = \left(1 - e^{-t}\right), \qquad t \in \langle 0, \pi).$$

5 bodů

3.3. Příklad: Vypočtěte všechny vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in R^2;\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}\}$.

10 bodů

3.4. Příklad: Najděte všechna $z \in C$, pro která

$$\operatorname{tgh} z = 1 - \mathrm{j}\,.$$

5 bodů

3.5. Příklad: Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle -2, 3\rangle$.
Nechť $Y = 3 - |2X + 1|$.
Stanovte:
a) hustotu náhodné veličiny Y,
b) pravděpodobnost $P\left(\frac{1}{2} < |Y - 1| < 1\right)$,
c) střední hodnotu $E(Y)$ a rozptyl $D(Y)$.

10 bodů

17.9.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

3-1

Setrvačník, jehož moment setrvačnosti je $J = 2\ kgm^2$, se otáčí okolo své osy s frekvencí 30 otáček za sekundu. V čase $t = 0$ začne na setrvačník působit časově proměnný brzdicí silový moment daný vztahem

$$M = k\,t^2 \qquad \text{kde} \quad k = 4\ Nm/s^2$$

Určete

a) za jak dlouhou dobu se setrvačník zastaví,

b) kolik otáček přitom vykoná.

(max. 8 bodů)

3-2

Stavy elektronů v elektronovém obalu atomu jsou dány kvantovými čísly n, l, m a m_s

a) Jaké fyzikální veličiny tako kvantová čísla popisují, jakých hodnot mohou nabývat?

b) Jaký je v atomu maximálně možný počet elektronů, které mají hlavní kvantové číslo $n = 4$?

(max. 7 bodů)

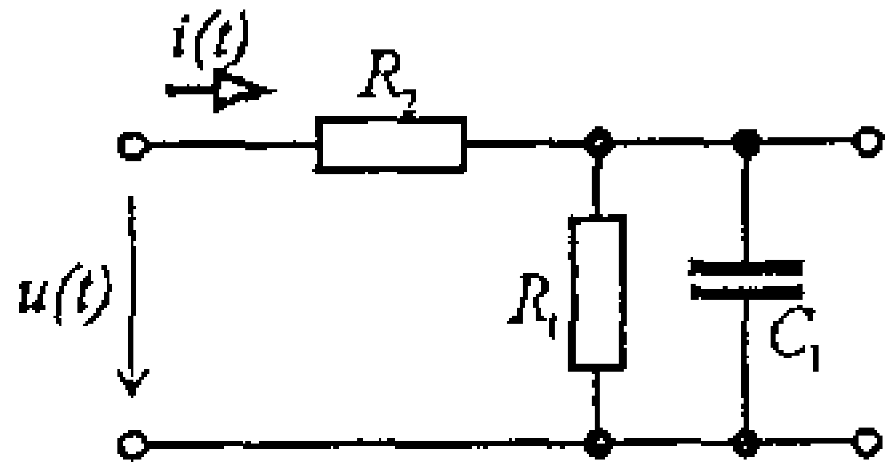
TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 3. 1 Celkem 7 bodů

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje periodického napětí $u(t) = 20 + 100 \sin(1000\,t)$ [V]

Vypočtěte časový průběh proudu i(t) odebíraného ze zdroje v ustáleném stavu a jeho efektivní hodnotu, je-li $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $C = 10\ \mu F$.

Uveďte možnosti měření fázového rozdílu vstupního a výstupního napětí včetně principu metody měření a vztahu pro výpočet výsledku měření



Obr. 1

Příklad 3. 2 Celkem 11 bodů

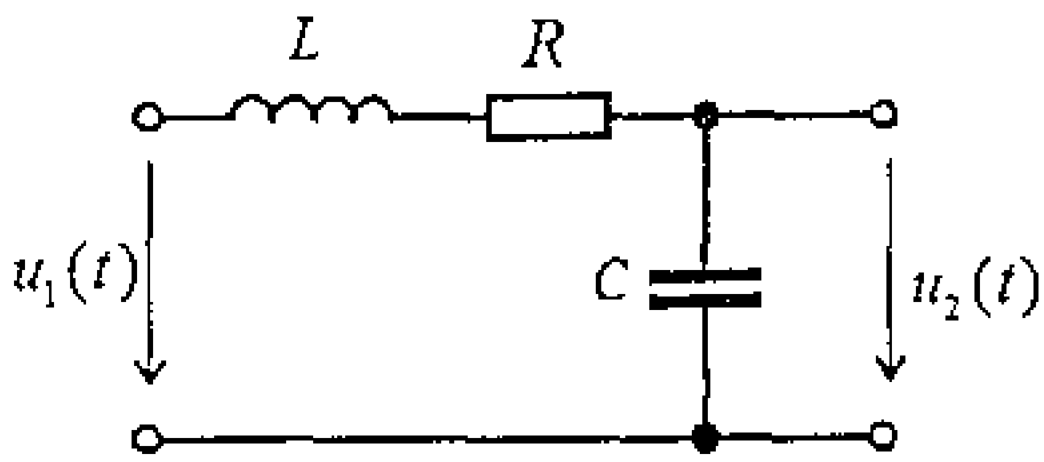
Obvod podle obr. 2 je napájen ze zdroje obdélníkového napětí o kmitočtu f = 10 kHz, pro nějž platí

$u_1(t) = 10$ V pro $0 < t < 10\ \mu s$

$u_1(t) = 0$ V pro $10 < t < 100\ \mu s$

Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro $0 < t < 10\ \mu s$, byl-li obvod pro $t = 0$ bez akumulované energie. Parametry obvodu jsou $L = 1\ \mu H$, $R = 80\ \Omega$, $C = 500$ pF. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor.

V ustáleném stavu má být průběh napětí $u_2(t)$ sledován na osciloskopu s dvěma časovými základnami, aby bylo možné detailní zobrazení případných překmitů. Vysvětlete princip osciloskopu se dvěma časovými základnami a vysvětlete užití dvojice časových základen pro zkoumání detailů průběhu napětí. K vysvětlení využijte nakreslení příslušných časových průběhů.

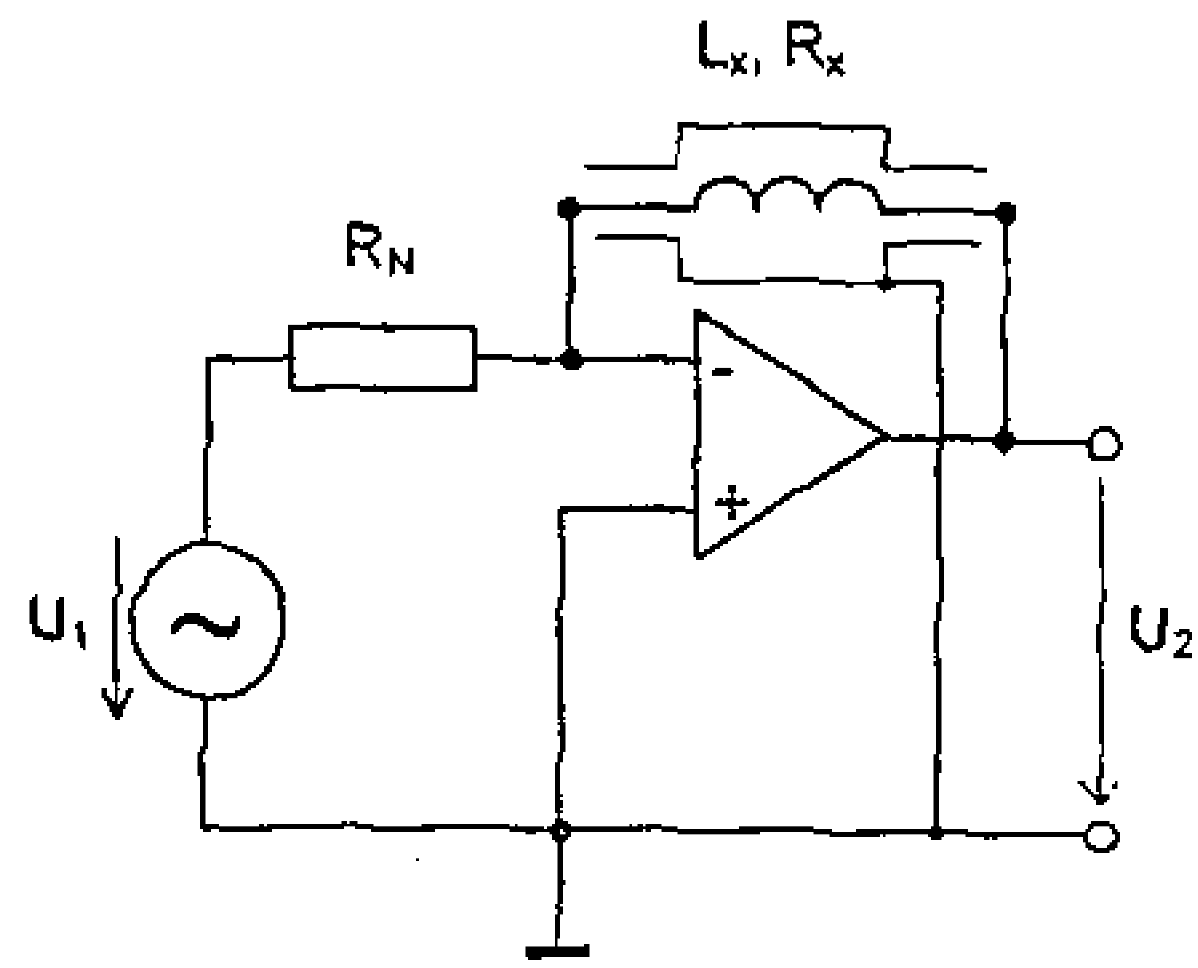


Obr. 2

17.9.1998

Příklad 3. 3 *celkem 7 bodů*

Obvod podle obr. je použit pro měření indukčnosti a činitele jakosti cívky reprezentované seriovým spojením induktoru L_X a rezistoru R_X. *Vypočtěte* přenos daného obvodu $P(j\omega) = U_2 / U_1$ a nakreslete jeho asymptotické kmitočtové *charakteristiky v logaritmických* souřadnicích pro obecné hodnoty L_X a R_X. *Určete* L_X a Q_X *měřené* cívky, je-li hodnota referenčního rezistoru $R_N = 10\ k\Omega$, referenční napětí $U_1 = 5{,}00$ V, použitý kmitočet 159,15 Hz a vektorvoltmetrem bylo změřeno výstupní napětí $U_2 = -0{,}8 - j\ 1{,}6$ V. Jak se uplatní parazitní kapacity stínění vůči měřené impedanci, bude-li obvod zapojen dle obr.?

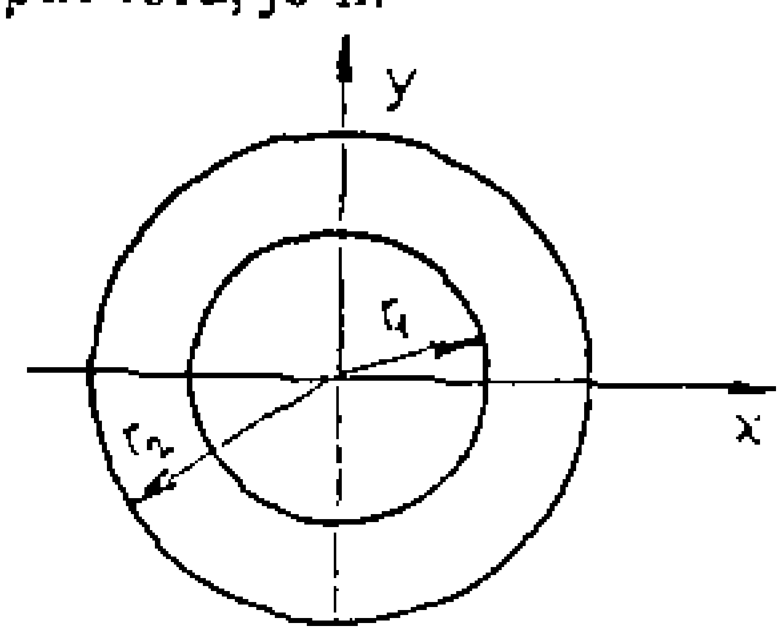


Příklad 3.4 **Celkem 6 bodů**

Odvoďte vztah pro kapacitu dvou vodivých soustředných válcových elektrod na jednotku délky.

Vypočítejte: 1) velikost této kapacity

2) energii obsaženou v elektrickém poli tohoto nabitého kapacitoru, je-li: $r_1 = 20$ mm, $r_2 = 40$ mm, $\varepsilon_r = 1.4$, $U = 500$ V.



$$\varepsilon_0 \doteq \frac{10^{-9}}{36\pi} \quad F/m$$

$$\mu_o = 4\pi 10^{-7} \quad H/m$$

Příklad 3.5 Celkem 4 body

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu f = 100 MHz se šíří v kladném směru osy **z** *v neohraničeném* bezeztrátovém prostředí s parametry $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$.

Určete: 1) amplitudu intenzity elektrického pole E , je-li střední hodnota Poyntingova vektoru

$$P_{se} = 0.1\ W/m^2$$

2) *okamžitou hodnotu intenzity* elektrického pole v místě z = 1 m v čase t = 1 μs, má-li v místě z = o a v čase t = 0 kladné maximum.

3.6 Zadání:

Jaký bude výstup způsobený provedením následujícího programu?

```
program TEST1;
var X : array [1..10] of integer;
    I,POM : integer;
begin
   for I:=1 to 10 do X[I]:=I+1;
   for I:=1 to 10 do
   begin
      Pom:=X[I];
      X[I]:=X[11-I];
      X[11-I]:=POM
   end;
   for I:=9 downto 1 do X[I]:=X[I+1];
   for I:=10 downto 1 do Write(X[I]:4)
end.
```

Syntéza 6 bodů

3.7 Zadání:

Hodnoty typu real uložené ve vnitřní reprezentaci v souboru považujeme za posloupnost $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, (n \geq 3)$. Sestavte proceduru, která pro vstupní soubor (specifikovaný) parametrem vytvoří výstupní soubor (opět určený parametrem) obsahující posloupnost druhých diferencí posloupnosti ze vstupního souboru.

Naznačte možné použití této procedury v hlavním programu, kde hodnoty čtené z klávesnice zapíšete do testovacího souboru pro proceduru a výsledný soubor diferencí vypíšete na obrazovku.

Poznámka: posloupnost druhých diferencí $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n-2}$ je definována vztahem $b_i = a_i - 2 * a_{i+1} + a_{i+2}$ pro $i = 1, 2, \cdots, n-2$

17.9.1998

Z3

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie **7 bodů**

3.1 Zadání:

Jaké znáte datové typy v jazyce Pascal. Uveďte příklad jednoduchého standardního typu a příklad libovolného strukturovaného typu jazyka Pascal. Jaký je základní rozdíl mezi strukturovaným a jednoduchým datovým typem v Pascalu?

standardní: Real, Integer, Byte, Longint   strukturované: záznam, množina, pole

3.2 Zadání:

Uveďte schema přečtení všech údajů ze souboru typu X ze souboru se jménem *SOUBOR.OOO* v Turbo Pascalu.

3.3 Zadání:

Jaký bude výsledný obsah registru ax po provedení tohoto úseku programu? Okomentujte jednotlivé instrukce a obsazení registrů ax a bx

```
mov   ax,1234h
mov   bx,ax
neg   ax
add   ax,bx
```

ax = 0000

3.4 Zadání:

Co jsou desítkové kódy? Který z nich je nejpoužívanější? Jak jsou v něm číslice zobrazeny? Na jakém principu je v tomto kódu založena sčítačka pro jeden desítkový řád? BCD +3, Gray

$s = a + b + p$

$s \geq 10 \rightarrow p$

3.5 Zadání:

Co je stránkování a jak se realizuje? Vysvětlete pojmy *virtuální adresový prostor, fyzický adresový prostor, stránka, stránkový rámec.* Kde je uložena tabulka stránek?

7.7.1998

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

8.1. Pro $t \in (0, \infty)$ určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} + 2x = f(t), \qquad x(0_+) = 1,$$

kde

$$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} -\sin t & \text{pro} \quad t \in (\pi, 2\pi), \\ 0 & \text{jinde.} \end{array} \right.$$

5 bodů

8.2. Příklad: V sinovou Fourierovu řadu rozviňte funkci f, kde

$$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1 - t, & t \in (0, 1), \\ 0, & t \in (1, 2). \end{array} \right.$$

5 bodů

8.3. Příklad: Prověřte, které z bodů $A = [0,0]$, $B = [2,1]$, $C = [2,2]$ jsou stacionární body funkce

$$f(x, y) = (4x - x^2)(2y - y^2),$$

a vypočtěte, zda v nich funkce f má lokální extrém. Určete typ extrému.

10 bodů

8.4. Příklad: Najděte všechna $z \in C$ vyhovující rovnici

$$\operatorname{tg} z = 1 + 2\mathrm{j}\,.$$

5 bodů

8.5. Příklad: Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají rozdělení dané tabulkami:

X	0	1	3	5
$p(x)$	1/9	2/9	3/9	3/9

Y	1	4	5	7
$p(y)$	2/15	4/15	5/15	4/15

Určete:
a) $E(X), D(X), \varrho(X, Y)$,
b) korelační tabulku,
c) pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Z = X + Y$,
d) pravděpodobnost $P(Z \in \langle 2, 8 \rangle)$.

10 bodů

7.7.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

8-1

Telekomunikační družice obíhá okolo Země po stacionární kruhové dráze, tzn. že její doba oběhu je 24 *h*. Určete

a) v jaké vzdálenosti od povrchu Země obíhá,

b) jaká je velikost rychlosti jejího pohybu.

Je zadán poloměr Země R = 6370 *km* a tíhové zrychlení při povrchu Země g = 9,81 $m\ s^{-2}$

(max. 8 bodů)

8-2

a) Definujte logaritmický dekrement útlumu.

b) Hmotný bod vykonává tlumený kmitavý pohyb o kmitočtu f = 1 *kHz*, logaritmický dekrement útlumu $\Lambda = 2.10^{-4}$. Určete, za jak dlouho poklesne energie kmitů hmotného bodu na jednu miliontinu.

(max. 7 bodů)

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

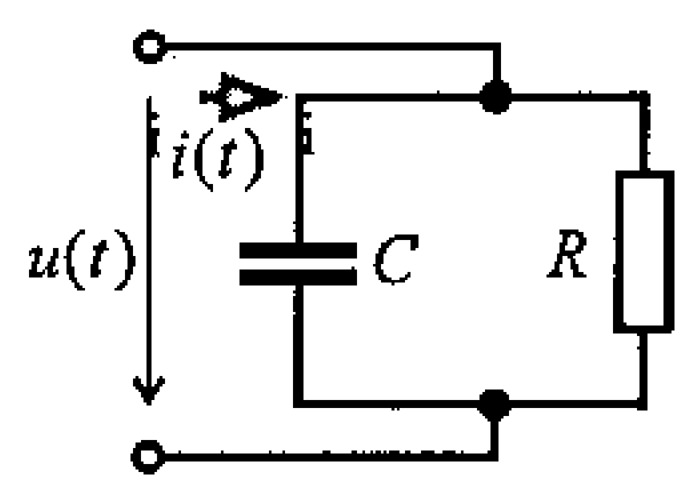
Příklad 8.1

Celkem 8 bodů

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje proudu $i(t) = 0.05 + 0.1 \sin(1000\,t)$ [A]

Vypočítejte časový průběh napětí u(t) v ustáleném stavu, je-li $R = 200\ \Omega$, $C = 5\ \mu F$.

Průběh napětí u(t) a proudu i(t) je vzorkován (dvoukanálovým číslicovým osciloskopem, vícekanálovou zásuvnou měřicí kartou apod.) a více než jedna perioda je uložena do paměti počítače. Jak vypočtete z pole vzorků {u } a {i }, uložených v paměti, činný výkon zátěže? Předpokládejte synchronní vzorkování napětí a proudu.



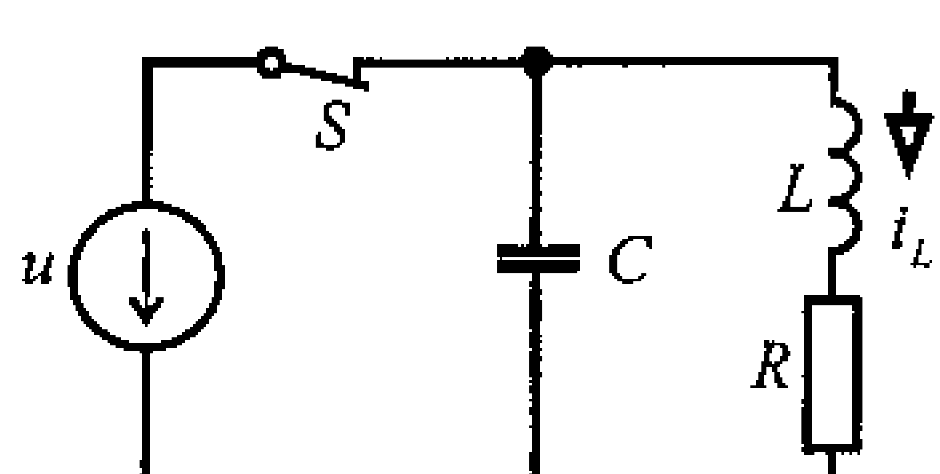
Obr. 1

Příklad 8.2

Celkem 10 bodů

Obvod podle obr.2 s parametry R =2,5 kΩ, L = 0,25 H, C = 0,25 μF je napájen ze zdroje napětí $u(t) = 10 \sin(5000\,t)$ [V] a je pro $t < 0$ v harmonickém ustáleném stavu. Určete a nakreslete časový průběh proudu induktorem L pro $t > 0$, jestliže se v čase $t = 0$ obvod odpojí od napájecího zdroje.

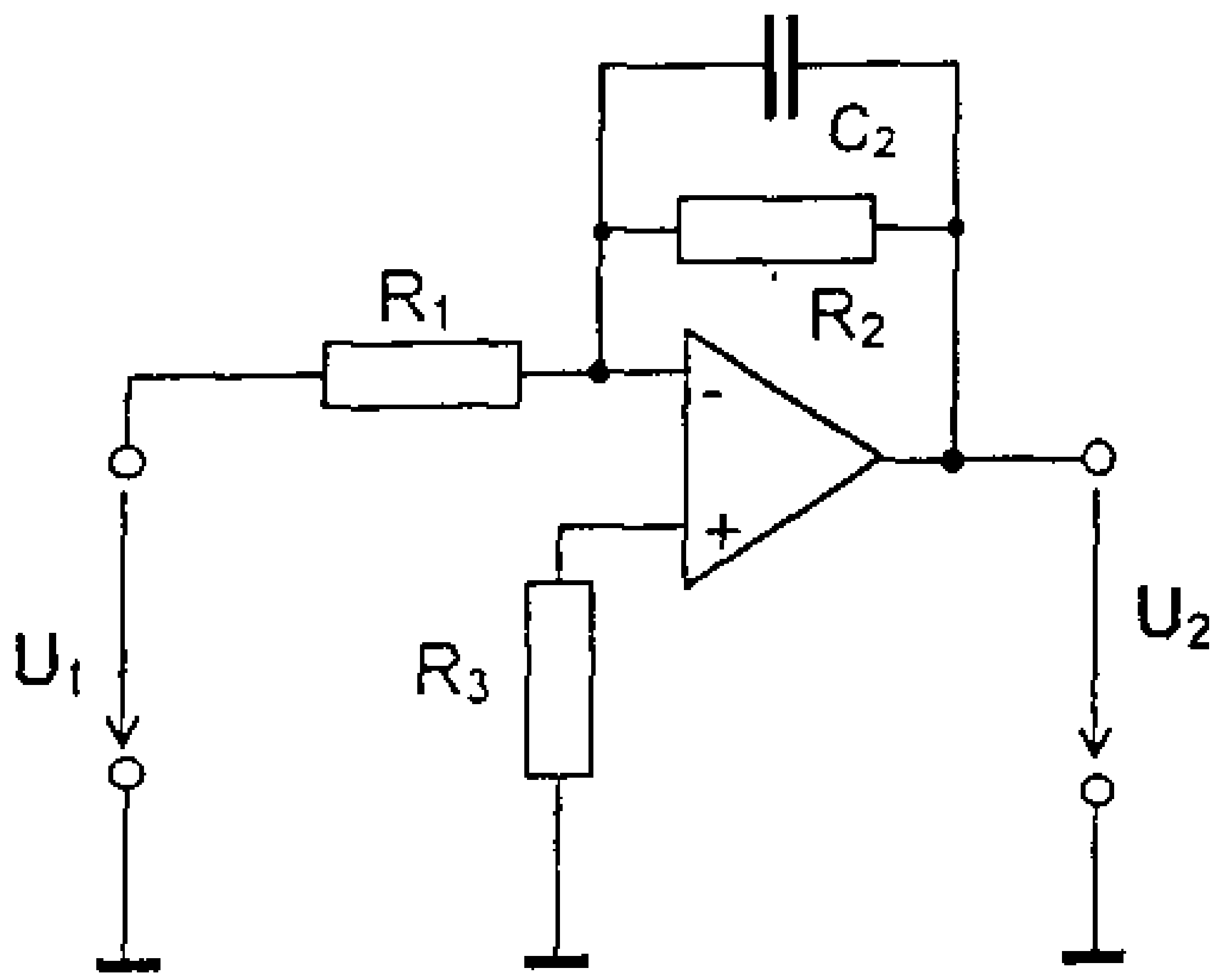
Uveďte způsob zobrazení proudu induktorem a stanovení jeho maximální hodnoty v průběhu přechodného děje.



Obr. 2

Příklad 8.3 7.7.1998 celkem 7 bodů

Měřicí zesilovač zapojený podle obrázku, který slouží současně jako filtr střídavé složky, tvořen ideálním operačním zesilovačem a rezistory $R_1 = 10\ k\Omega$, $R_2 = 1\ M\Omega$, $R_3 = 10\ k\Omega$, kondenzátorem $C_2 = 100$ nF. Určete přenos $\mathbf{P}(j\omega) = \mathbf{U_2} / \mathbf{U_1}$ daného zapojení a nakreslete jeho asymptotickou modulovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Určete max. možnou chybu měření stejnosměrné složky vstupního napětí s hodnotou $U_0 = 0{,}05$ V, jsou-li odchylky odporu použitých rezistorů max. 0,1% od jejich jmenovité hodnoty a výstupní napětí měříme stejnosměrným číslicovým voltmetrem s rozsahem 10 V a udanou chybou 0.05 % z údaje + 0.02 % z rozsahu.



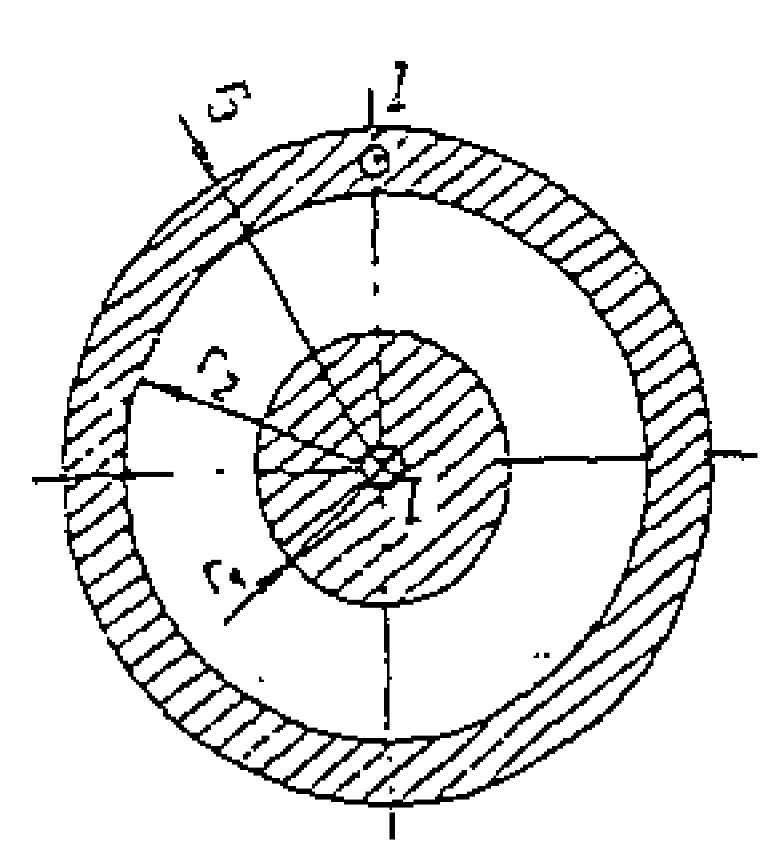
Příklad 8.4 Celkem 4 body

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 10^{-3}$ S/m. Kmitočet vlny je f = 9 MHz.
Výkon procházející jednotkovou plochou kolmou na směr šíření je 25 W. Vypočítejte amplitudu intenzity elektrického a magnetického pole v tomto místě.

Příklad 8.5 Celkem 6 bodů

Vnitřním a vnějším vodičem koaxiálního kabelu protéká proud I = 100 mA opačnými směry - viz obrázek. Vypočítejte a graficky znázorněte s měřítky na obou osách průběh intenzity magnetického pole H pro:

a/ $r \le r_1$
b/ $r_1 \le r \le r_2$
c/ $r_2 \le r \le r_3$
d/ $r_3 \le r$
je-li: $r_1 = 1$ mm, $r_2 = 6$ mm, $r_3 = 7$ mm



$$\varepsilon_0 \doteq \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \mathrm{F/m} \qquad \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

7.7.1998

Z8

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie — 7 bodů

Syntaxe – souhrn pravidel udávajících přípustné tvary dílčích konstrukcí

8.1 Zadání: sémantika – význam jednotlivých konstrukcí

Co je syntaxe a sémantika programovacího jazyka.

8.2 Zadání:

Proč nelze k položkám záznamů přistupovat pomocí indexů.

protože ~~ka~~ položky záznamu mohou být různě dlouhé

8.3 Zadání:

Jaké znáte způsoby popisu logických funkcí?

Karnaughova mapa, Svobodova mapa, algebraický výraz, schéma zap.

8.4 Zadání: pravdivostní tabulka

Jaký je rozdíl mezi instrukcemi

```
shr (posuv vpravo)    a    sar (aritmetický posuv vpravo)
```

bity zleva doplňuje nulami — nejnižší bit do CY, nejvyšší kopíruje (znaménko)

procesoru I8086.

8.5 Zadání:

Co znamená přeplnění a nenaplnění v pohyblivé řádové čárce? Co je normalizovaný tvar čísel a proč se používá? největší možný – přeplnění

výsledný exponent – nejmenší možný – nenaplnění

Analýza — 2 body

8.6 Zadání:

Zjistěte, jakou posloupnost generuje následující funkce (uveďte prvních sedm členů - TEST(1), TEST(2), TEST(3),..). Dále uveďte důvod, proč je použití rekurze neefektivní.

```
function TEST(N:integer):integer;
     begin
       if N = 1 then
         TEST:=1
       else if N = 2 then
         TEST:=1
       else
         TEST:=TEST(N-1) + TEST(N-2)
     end;
```

8.7 Zadání:

Napište proceduru, ktera vypíše zadaný soubor typu *text* v hexadecimálním tvaru tzn., že každý byte souboru bude vyjádřen jako dvojice hexadecimálních číslic. Na každé řádce výstupu s vyjimkou posledního bude vypsáno právě 16 bytů.

```
nnnn: xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx xx
```

kde *nnnn* je pořadové číslo prvního čísla či znaku (v hexadecimálním tvaru) a xx je hexidecimální hodnota znaku.
Poslední řádka nemusí obsahovat 16 znaků.

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

10.1. Pro $t \in (0, \infty)$ určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} + x = f(t), \qquad x(0_+) = 2\pi,$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 2\pi - t & \text{pro} \quad t \in (0, 2\pi), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

5 bodů

10.2. Příklad: V kosinovou Fourierovu řadu rozviňte funkci f,

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0, & t \in (1, 2). \end{cases}$$

5 bodů

10.3. Příklad: Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$$

na množině

$$M = \{(x, y);\ x + |y| \leq 5,\ x \geq 0\}$$

10 bodů

10.4. Příklad: Nalezněte všechna komplexní čísla z, pro která platí

$$\sinh(z - \frac{3}{2}\pi\,\mathrm{j}) - \cosh(z - \frac{3}{2}\pi\,\mathrm{j}) = 2\,\mathrm{j}\,.$$

5 bodů

10.5. Příklad: Náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2y & \text{pro} \quad \mathrm{x} \in \langle 0, 1 \rangle, \mathrm{y} \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte:

a) konstantu k,

b) pravděpodobnost $P\,(X, Y) \in A)$, kde $\mathrm{A} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y});\ \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{y} \leq 0\}$,

c) podmíněnou střední hodnotu $E(Y|x)$.

10 bodů

18.4.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

10-1

Elektron, urychlený potenciálním rozdílem $U = 6\ kV$, vletěl do homogenního magnetického pole o velikosti magnetické indukce $B = 0{,}01\ T$ pod úhlem $\alpha=30°$ vzhledem ke směru mg. pole, takže se začal pohybovat po dráze ve tvaru šroubovice.

Určete

a) poloměr šroubovice,

b) stoupání šroubovice.

Hmotnost elektronu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$, náboj $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ As$

(max. 8 bodů)

10-2

a) Popište činnost difrakční mřížky.

b) Určete nejvyšší řád spektra, v němž je ještě možné pozorovat záření o vlnové délce 700 nm pomocí difrakční mřížky, která má 300 vrypů na 1 mm.

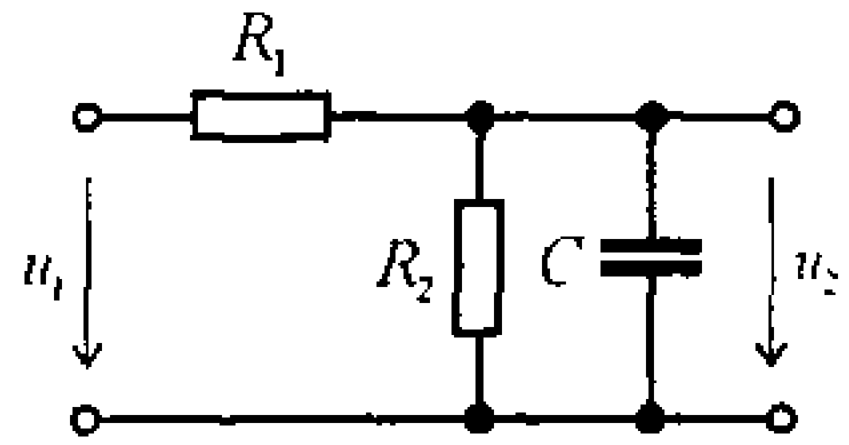
(max. 7 bodů)

Příklad 10.1

Celkem 7 bodů

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje napětí $u_1(t) = 5 + 10 \sin(1000\, t)$ [V]. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí a jeho efektivní hodnotu v ustáleném stavu, je-li $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $C = 15\ \mu\mathrm{F}$.

Průběh výstupního napětí $u_2(t)$ je vzorkován (číslicovým osciloskopem, zásuvnou měřicí kartou apod.) a více než jedna perioda je uložena do paměti počítače. Jak vypočtete z pole vzorků $\{u_i\}$, uložených v paměti, efektivní hodnotu tohoto napětí?



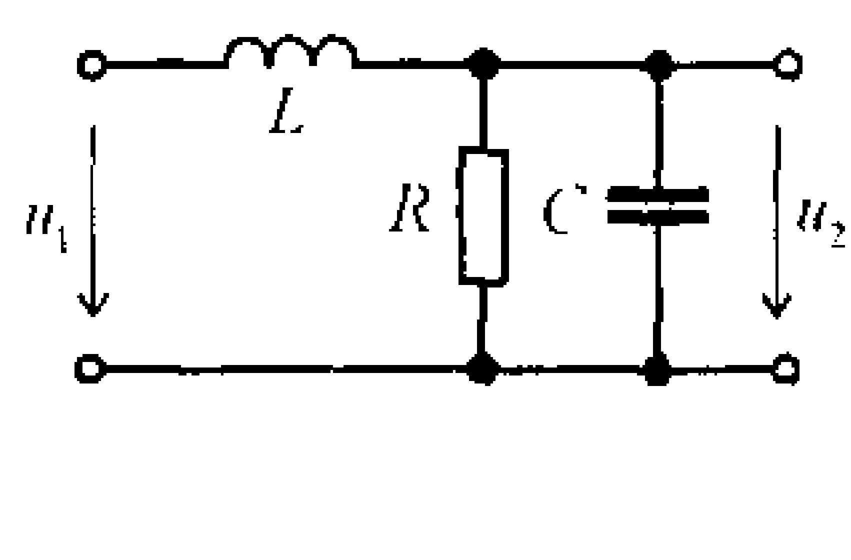
Obr. 1

Příklad 10.2

Celkem 11 bodů

Na vstup lineárního dvojbranu podle obr. 2 je připojen budicí D/A převodník s nulovým výstupním odporem. Vypočtěte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ lineárního dvojbranu podle obr. 2, jestliže budicí D/A převodník generuje na vstupu dvojbranu v čase $t = 0$ napěťový skok z hodnoty $U_{11} = 5$ V na hodnotu $U_{12} = 10$ V, t.j $u_1(t) = 5 + 5*1(t)$ V. Parametry prvků dvojbranu jsou $R = 500\ \Omega$, $L = 2$ mH, $C = 1\ \mu$F. Pro $t < 0$ byl daný obvod v ustáleném stavu.

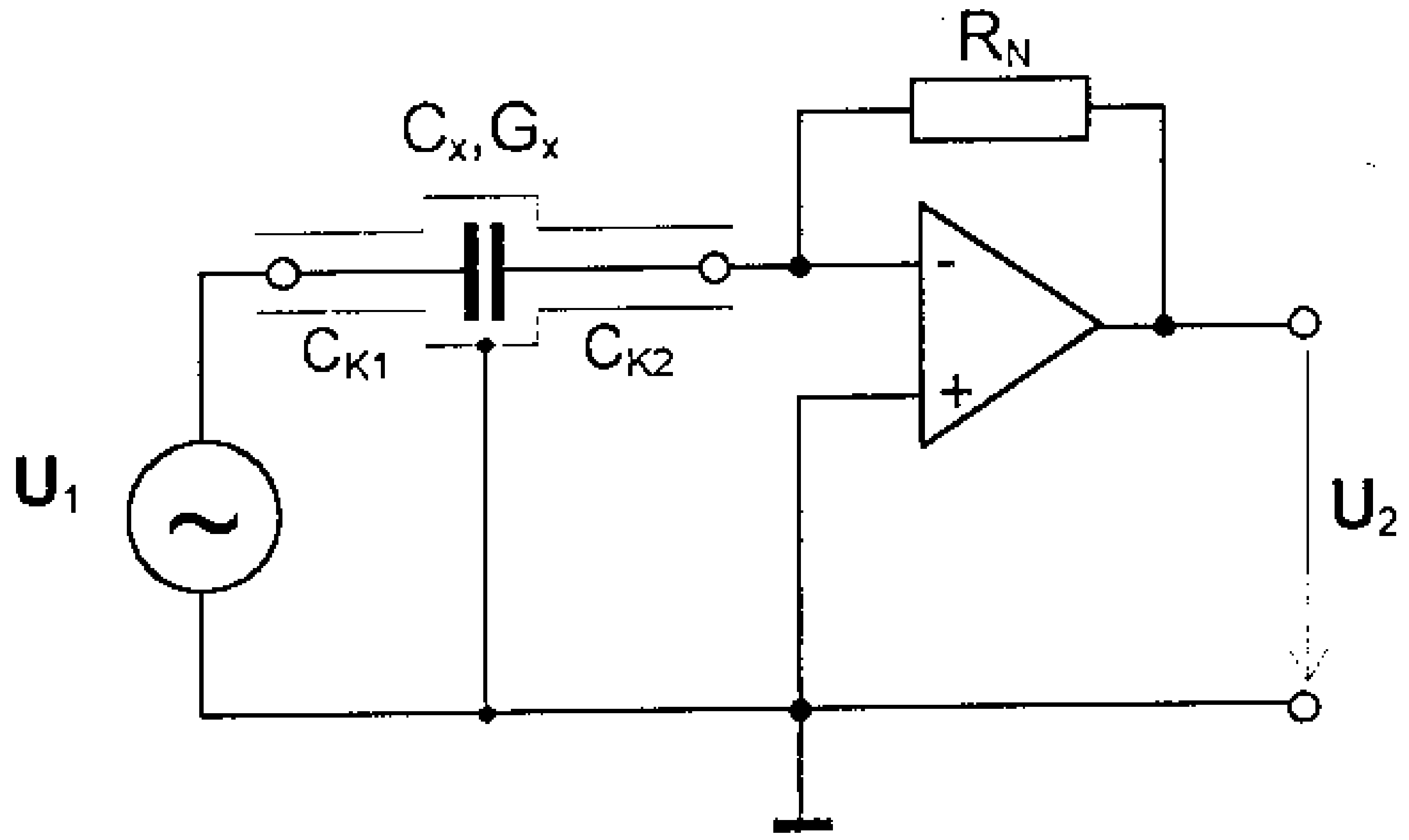
Výstupní napětí v ustáleném stavu je měřeno číslicovým voltmetren s dvojí integrací. Předpokládejte, že vstupní odpor číslicového voltmetru je nekonečný. Nakreslete blokové schéma a vysvětlete princip činnosti použitého číslicového voltmetru.



Obr. 2

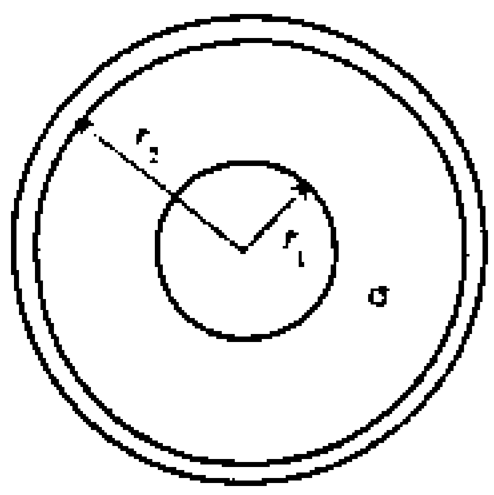
Příklad 10.3 **celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. je použit pro měření kapacity C_X a vodivosti G_X kondenzátoru reprezentovaného paralelním náhradním schematem. Vypočtěte přenos daného obvodu $\mathbf{P}(j\omega) = \mathbf{U}_2 / \mathbf{U}_1$ a nakreslete jeho asymptotické kmitočtové charakteristiky v logaritmických souřadnicích pro obecné hodnoty C_X a G_X. Určete hodnoty C_X a G_X, je-li hodnota referenčního rezistoru $R_X = 100\ \mathrm{k\Omega}$, referenční napětí $\mathbf{U}_1 = 10{,}00$ V, použitý kmitočet 159,15 Hz a vektorvoltmetrem bylo změřeno výstupní napětí $\mathbf{U}_2 = -0{,}02 - j\,5{,}00$ V. Jak se uplatní parazitní kapacity stínění a přívodních koaxiálních kabelů k měřenému kondenzátoru, bude-li obvod zapojen dle obr. a proč?



Příklad 10.4 **Celkem 6 bodů**

Koaxiální kabel dle obrázku je připojen na napětí U = 400 V. Jeho dielektrikum má měrnou vodivost $\sigma = 2.10^{-9}$ S/m. Vypočítejte svodovou vodivost, svodový proud a ztráty tímto proudem způsobené na jednotku délky kabelu, je-li: $r_1 = 5$ mm, $r_2 = 50$ mm.



$$\varepsilon_0 \doteq \frac{10^{-9}}{36\pi}\ [\mathrm{F/m}]$$

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ [\mathrm{H/m}]$$

Příklad 10.5 **Celkem 4 body**

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří v kladném směru osy x v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m. Kmitočet vlny je f = 10 kHz. Střední hodnota Poyntingova vektoru ve vzdálenosti x = 5 m od počátku je 10 W/m². Vypočítejte amplitudy intenzity elektrického pole v místě x = 0 m a x = 5 m.

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie 7 bodů

10.1 Zadání:

Jak lze urychlit vyhledání prvku pole s danou hodnotou? Uveďte časovou složitost algoritmů vyhledávání v poli.

10.2 Zadání:

Jaké znáte druhy parametrů procedur a funkcí?

Volané hodnotou a odkazem

10.3 Zadání:

Uveďte použití a rozdělení bistabilních klopných obvodů. Charakterizujte hranové klopné obvody a hladinové klopné obvody.

RS, JK, D,

10.4 Zadání:

Registrová nepřímá adresace.

Toto je aktuální obsazení registrů procesoru 8086:

```
    AH AL      BH BL      CH CL     DH DL
AX  FF FF  BX  29 5D  CX  00 F2  DX 3A F2

 SP  0F FF  SI  00 10  IP  00 00
 BP  00 00  DI  00 00
 SS  2D 0D  DS  2D 0D  CS  2D 0D

     2D0C0:   20 07 20 07 20 07 20 07
     2D0C8:   20 07 20 07 20 07 20 07
     2D0D0:   8A 04 6D A3 40 F7 26 54
     2D0D8:   A3 8B 1E 8D A3 33 C9 03
     2D0E0:   1E 76 A3 13 C9 D1 E3 D1
```

Co bude obsahem registru `al` po provedení instrukce `mov al,[si]` a proč?

10.5 Zadání:

Jak jsou zobrazena čísla v tzv. pohyblivé řádové čárce? (Neuvažujte použití tzv. skryté jedničky). Jak se provedou operace sčítání, odčítání? (Stačí základní princip.) (m,e) $A = m \cdot z^e$

---

sčítání/odčítání – úprava exp na stejný tvar
+/- mantisy

Analýza 18.4.1998 2 body

10.6 Zadání:
Jaký bude výstup následujícího cyklu?

```
for J:=1 to 3 do
     begin
          X:=J*5;
          if (X>7) then if (x<12) then write('Red')
                         else write('Blue');
          writeln('Black');
     end;
```

Syntéza 6 bodů

10.7 Zadání:
Napište proceduru, která v zadané sekvenci čísel typu integer najde nejdelší úsek, jehož prvky tvoří rostoucí posloupnost. Vstup sekvence do procedury a výstup hledaného úseku z procedury realizujte pomocí vhodného typu parametrů. Proceduru použijte v programu, který prvky pole přečte a po vyvolání procedury vypíše prvky nalezené sekvence.

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

2.1. Určete řešení lineární diferenciální rovnice

2

$$2\ddot{x} + 5\dot{x} = 29\cos t + 3t$$

s počátečními podmínkami $x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 5$.

5 bodů

2.2. Příklad: Funkce f je periodickým prodloužením funkce f^*, kde

$$f^*(t) = 2t, \qquad t \in \langle -1, 1).$$

Pro které indexy je amplituda harmonické menší než 10^{-2}.

5 bodů

2.3. Příklad: Prověřte, které z bodů $A = [1,1]$, $B = [1,2]$ jsou stacionární body funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$$

a vypočtěte, zda v nich f má lokální extrém. Určete typ extrému.

10 bodů

2.4. Příklad: K harmonické funkci v,

$$v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$$

najděte holomorfní (regulární) funkci $f(z)$ takovou, aby $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$.

5 bodů

2.5. Příklad: Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} cx(4-x) & \text{pro} \quad x \in (0,4), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Nechť $Y = \max(X^2, X^{-1})$. Stanovte:

a) konstantu c,

b) hustotu náhodné veličiny Y,

c) pravděpodobnost $P\left(\frac{1}{2} < |Y-2| < 1\right)$.

10 bodů

22.11.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

2-1

Dřevěná tyč ve tvaru homogenního válce o délce $l = 1$ *m* a hmotnosti $m_1 = 1$ *kg* se může volně otáčet kolem osy, která prochází kolmo středem tyče. Tyč je ve stavu klidu, na konec tyče však narazí střela o hmotnosti $m_2 = 10$ *g*, letící rychlostí $v = 100$ *m/s* ve směru kolmém na tyč i na osu otáčení, a uvízne v tyči.
a) Určete úhlovou rychlost otáčení tyče.
b) Určete její moment hybnosti po uváznutí střely.
Moment setrvačnosti homogenní tyče vzhledem k ose otáčení je $J_o = m\, l^2/12$

(max. 8 bodů)

2-2

a) Definujte entropii.

b) Jak se změní entropie ideálního plynu teploty $t = 20$ *°C*, tlaku $p = 0{,}101$ *Pa* a objemu $V = 2$ *l* , když expanduje do vakua na dvojnásobný objem?

(max. 7 bodů)

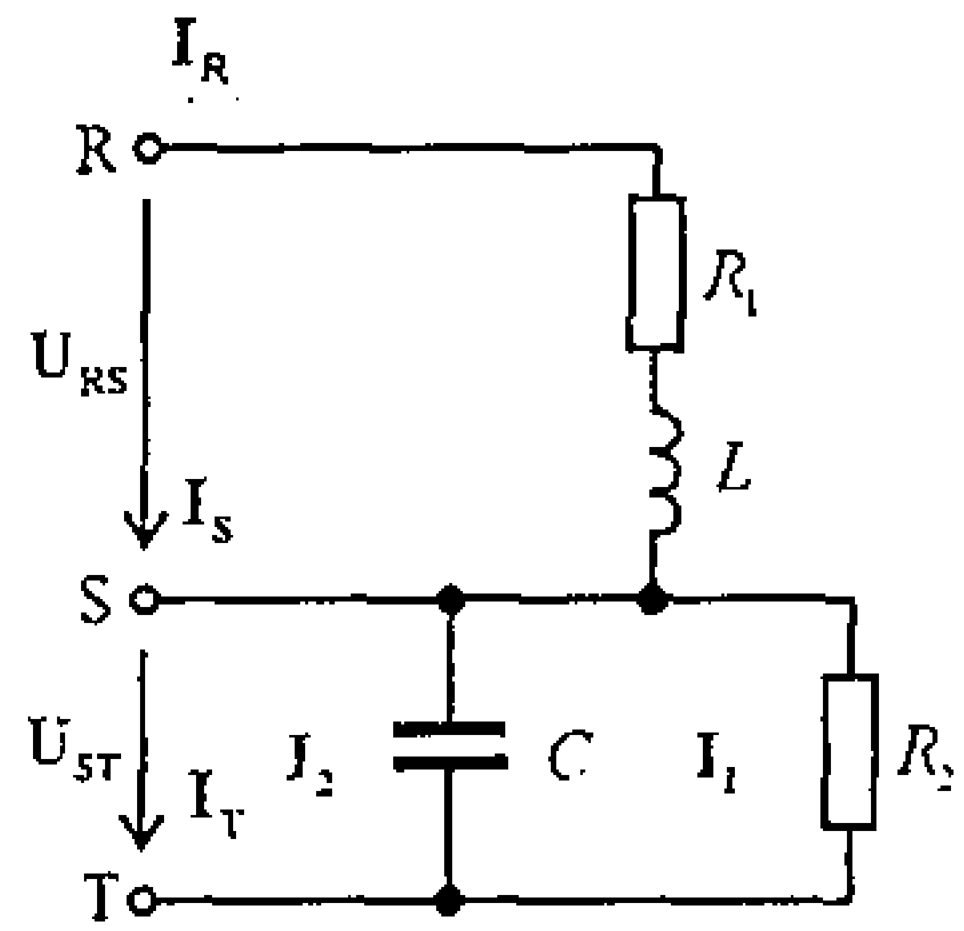
22.11.1997

Příklad 2.1

Celkem 7 bodů

Obvod podle *obr.1* je napájen z trojfázového zdroje jehož fázory napětí v měřítku efektivních hodnot jsou $\mathbf{U}_{RS} = 380$ V, $\mathbf{U}_{ST} = 380\ e^{-j2\pi/3}$ V. Vypočítejte fázor proudu $\mathbf{I}_R$ a jeho časový průběh $i_R(t)$ v ustáleném stavu a celkový jalový výkon, je-li $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, L = 0,3183 H, $C = 15.915\ \mu$F.

Nakreslete zapojení wattmetrů pro měření jalového výkonu dané nesouměrné zátěže a uveďte vztah pro určení celkového jalového výkonu z údajů jednotlivých wattmetrů.



Obr.1

Příklad 2.2

Celkem 11 bodů

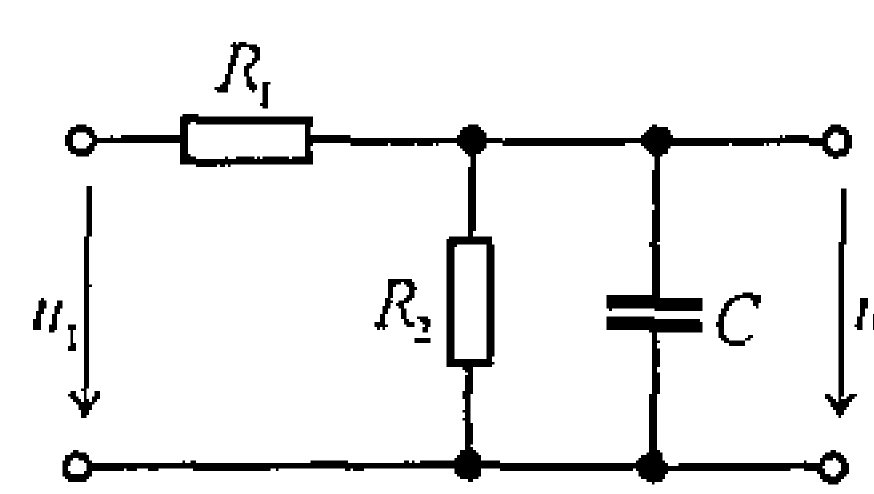
Obvod podle obr. 2 se v čase $t = 0$ připojí na zdroj periodického obdélníkového napětí o kmitočtu $f = 50$ kHz pro nějž platí

$u_1(t) = 5$ V pro $0 < t < 10\ \mu$s

$u_1(t) = 0$ V pro $10\ \mu s < t < 20\ \mu$s

Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ v první periodě budicího signálu pro $0 < t < 20\ \mu$s, je-li $R_1 = R_2 = 400\ \Omega$, $C = 50000$ pF.

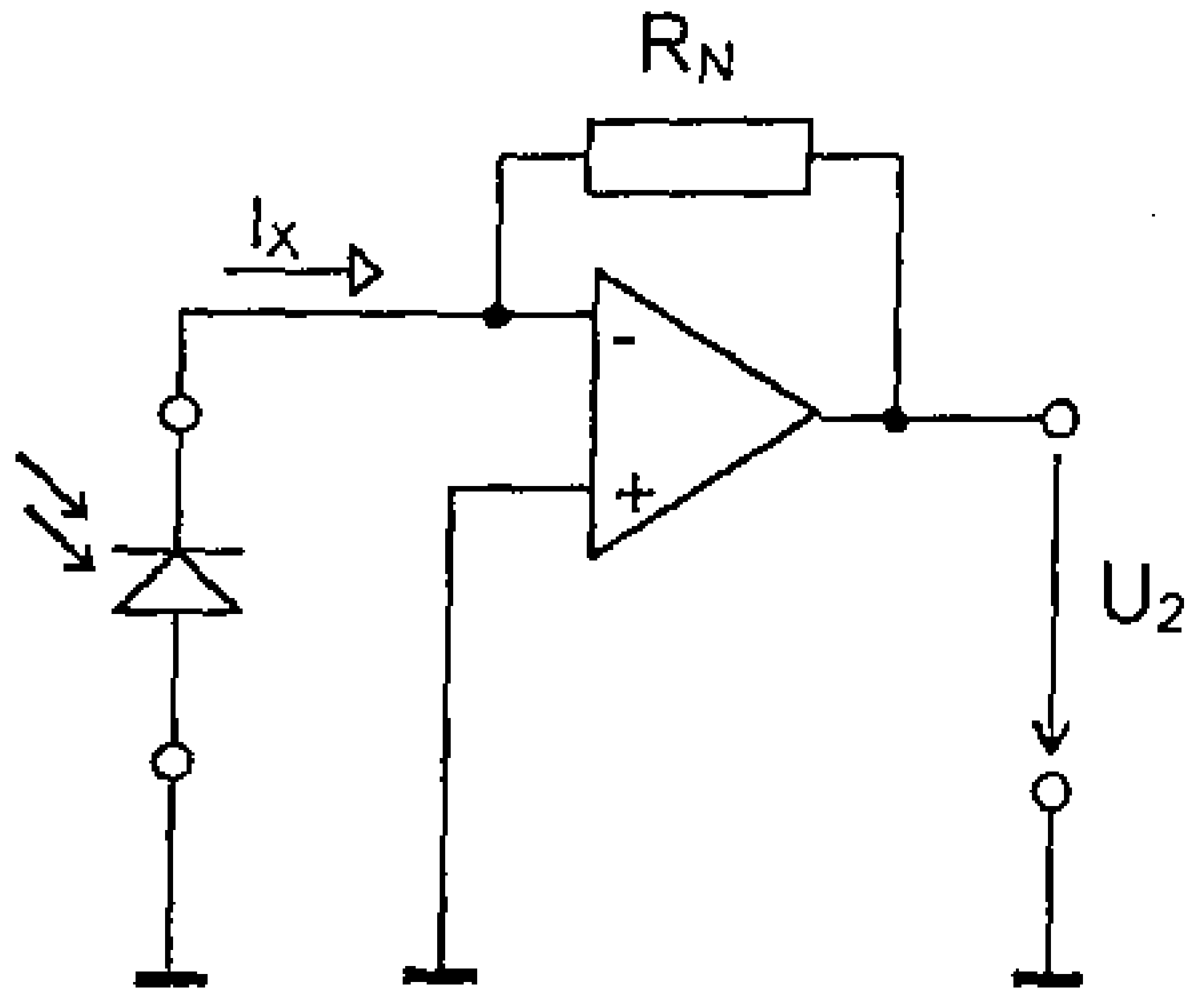
Pro měření frekvence vstupního signálu je použit čítač. Nakreslete jeho blokové schéma v režimu přímého měření frekvence a určete chybu měření, bude-li hradlo čítače otevřeno po dobu $T_N = 1$ s a chybu T_N lze zanedbat.



Obr.2

Příklad 2.3 22.11.1997 **celkem 7 bo**

Obvod podle obr. obsahující operační zesilovač je použit pro měření proudu fotodi
Vypočtěte velikost odporu R_X pro převod 1 μA / 1 V, je-li operační zesilovač ideální. Stano
maximální možnou chybu měření pro proud $I_X = 5$ μA, je-li přesnost použitého odporu $\delta_{R_X} = 0{,}1$ % a vstupní klidový proud OZ $|I_0| < 50$ nA (vstupní napěťovou nesymetrii zanedbejte). Výstupní napětí je měřeno číslicovým voltmetrem s udanou chybou 0.1 % z údaje + 0.05 % z rozsahu. Použitý rozsah voltmetru je 10 V a jeho vstupní odpor 1 MΩ. Jaký je vstupní odpor použitého zapojení?



Příklad 2.4 **Celkem 6 bodů**

Nabitý vodivý válec o poloměru $R_1 = 10$ mm je soustředně obklopen válcovým dielektrikem o poloměru $R_2 = 30$ mm s permitivitou $\varepsilon_r = 2$. Na vnějším povrchu dielektrika je umístěna velmi tenká vodivá elektroda. Intenzita elektrického pole na povrchu vnitřního vodiče má hodnotu $E = 1$ kV/m. Vypočítejte velikost náboje τ_0 [C/m] na tomto vodiči, napětí mezi oběma vodiči a jejich kapacitu. Délka soustavy je $l = 10$ m.

$$\varepsilon_0 \doteq \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m} \qquad \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} \text{ H/m}$$

Příklad 2.5 **Celkem 4 body**

Napište rovnici pro fázor a okamžitou hodnotu intenzity elektrického pole rovinné harmonické elektromagnetické vlny šířící se v kladném směru osy z v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 10^{-4}$ S/m. Kmitočet vlny je $f = 5$ GHz. Intenzita elektrického pole nabývá svého kladného maxima pro $z = 0$ m a $t = 0$ s, jeho velikost je $E_{max} = 10^{-2}$ V/m. Vypočítejte střední hodnotu Poyntingova vektoru v místě $z = 10$ m a určete jeho směr.

Výpočetní technika

22.11.1997

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie — 7 bodů

2.1 Zadání:

Jaké jsou základní rysy objektového programování.

dědičnost, zapouzdření, polymorfismus, přetížení operátorů

2.2 Zadání:

Vyjádřete, co je to ordinální typ, a vyjmenujte alespoň tři kontexty, ve kterých se v Pascalu používá. každé hodnotě typu X je přiřazeno ord. číslo

def fce ORD, SUCC, PRED každé hodnotě je i její následník

integer, boolean, char a už. def.

2.3 Zadání:

Co bude v registru BL po provedení každé z následujících instrukcí? Znázorněte ve dvojkovém zápisu, jak se provede operace xor.

```
mov    BL,5Ah      ;BL=01011010
xor    BL,0FFh     ;BL=10100101
```

2.4 Zadání: řídící jednotka počítače (vůbec)

Co je to řadič (obecně) a jak je možné ho realizovat? Jaké má vstupy a výstupy? Co je to mikroprogram, jaký má vztah programu a kde je uložen?

2.5 Zadání: sekvence mikrooperací, nekonečný cyklus

Stručně charakterizujte bezkolisní sítě typu LAN (Local Area Network).

Analýza — 2 body

2.6 Zadání:

Co vypíše následující program?

```
program Test(output);
var P,Q,R:^integer;
procedure Vypis;
begin writeln(P^:3, Q^:3, R^:3) end;
begin
   new(P); P^:=10;
   new(Q); Q^:=20;
   new(R); R^:=30;
   Vypis;
   P^:=Q^;
   Vypis;
   P:=R;
   Vypis;
   P^:=40;
   Vypis
end.
```

2.7 Zadání:

Napište program, který přečte posloupnost celých čísel zadanou vstupními daty ve tvaru

```
n a1 a2 ... an
```

a vypíše její nejdelší část tvořící neklesající posloupnost. Je-li takových částí více, vypíše libovolnou z nich. Příklady vstupu a výstupu: a) vstup:

```
10 1 3 5 4 6 7 9 12 4 5
```

výstup:

```
4 6 7 9 12
```

b) vstup:

```
6 5 8 2 1 7 9
```

výstup:

```
5 8
```

nebo

```
7 9
```

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

5.1. Určete řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y, \\ \dot{y} &= -x + 3y, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 3, \quad y(0) = 1$.

5 bodů

5.2. Příklad: Určete Fourierovu řadu funkce, která je periodickým prodloužením funkce

$$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \pi - t, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ t + \pi, & t \in \langle -\pi, 0 \rangle. \end{array} \right.$$

5 bodů

5.3. Příklad: Ověřte, že bod $A = [-2, 0]$ je stacionárním bodem funkce $z(x, y)$ definované rovnicí

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$$

a vztahem $z(x, y) < 2$. Vypočtěte $z(-2, 0)$.

10 bodů

5.4. Příklad: K harmonické funkci u,

$$u(x, y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

určete holomorfní (regulární) funkci $f(z)$ takovou, aby $\mathrm{Re} f(z) = u(x, y)$.

5 bodů

5.5. Příklad: Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají rozdělení s hustotou

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{lll} \frac{1}{2} & \text{pro} & x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0 & \text{jinde} & \end{array} \right.$$

a

$$g(y) = \left\langle \begin{array}{lll} 2\mathrm{e}^{-2y} & \text{pro} & y \in \langle 0, +\infty), \\ 0 & \text{jinde.} & \end{array} \right.$$

Nechť $Z = X + Y$. Stanovte:
a) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Z,
b) pravděpodobnost $P(Z \in \langle 1, 2 \rangle)$,
c) střední hodnotu $E(Z)$.

10 bodů

18.9.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

5-1

Elektron je urychlován homogenním elektrickým polem. Velikost zrychlení elektronu je přitom $a = 10^{12}\ m\ s^{-2}$. Určete
a) intenzitu elektrického pole, jež elektron urychluje
b) práci vykonanou elektrickým polem při urychlování tohoto elektronu za dobu $t = 10^{-6}\ s$ od okamžiku, kdy byl elektron v klidu.

Je dána velikost náboje a hmotnosti elektronu: $e = 1{,}6.10^{-19}\ As$, $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$

(max. 8 bodů)

5-2

a) Co musí platit pro sílu působící na hmotné těleso, aby toto těleso začalo vykonávat kmity?
b) Závaží o hmotnosti 20 *g* je připevněno na pružině o zanedbatelné hmotnosti. Závaží bylo původně v klidu ve své rovnovážné poloze, a po dodání energie 0,1 *J* začalo vykonávat netlumené lineární harmonické kmity o amplitudě 3 *cm*. Určete jejich frekvenci!

(max. 7 bodů)

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie — 7 bodů

5.1 Zadání:
Jak je specifikován (určen) datový typ *integer* v Pascalu?
2 bajty

5.2 Zadání:
Jaké výhody a nevýhody má použití rekurze?
výhoda – jednodušší algoritmus
nevýhoda – větší pam. režie

5.3 Zadání:
Znázorněte vnitřní propojení sčítačky - odčítačky čtyřbitových binárních čísel v doplňkovém kódu. Jako stavební prvky použijte bloky sčítačky pro jeden binární řád. Indikujte přeplnění.

registry
vyr. pam.
hlavní paměť
vnější pam
záložní pam

5.4 Zadání:
Uveďte typickou hierarchii paměťového systému počítače. Jaké ekonomické důvody vedou k tomu, že je vhodné konstruovat paměťový systém počítače hierarchicky? Vysvětlete pojem virtuální paměť.

5.5 Zadání:
Co je přerušení? Charakterizujte reakci procesoru na žádost o přerušení.

Analýza — 2 body

5.6 Zadání:
Jaký bude výstup následujícího programu?

```
program PARAMETR;
var A: integer;
procedure InOut (var X: integer);
begin writeln ('procedura 1:', A:5, X:5);
      X := 18;
      writeln ('procedura 2:', A:5, X:5);
end;
begin
   writeln ('   promenna     A    X');
   A := 15;
   writeln ('   hlavni 1:', A:5);
   InOut (A);
   writeln ('   hlavni 2:', A:5);
end.
```

Syntéza **18.9.1997** 6 bodů

7.7 Zadání:

Napište proceduru, která zpracuje pole s n celými čísly a vytiskne nejprve lichá a potom sudá čísla z tohoto pole. Použití procedury ilustrujte na jednoduchém programu, který zahrnuje i nezbytné deklarace typů a proměnných.

 18.9.1997

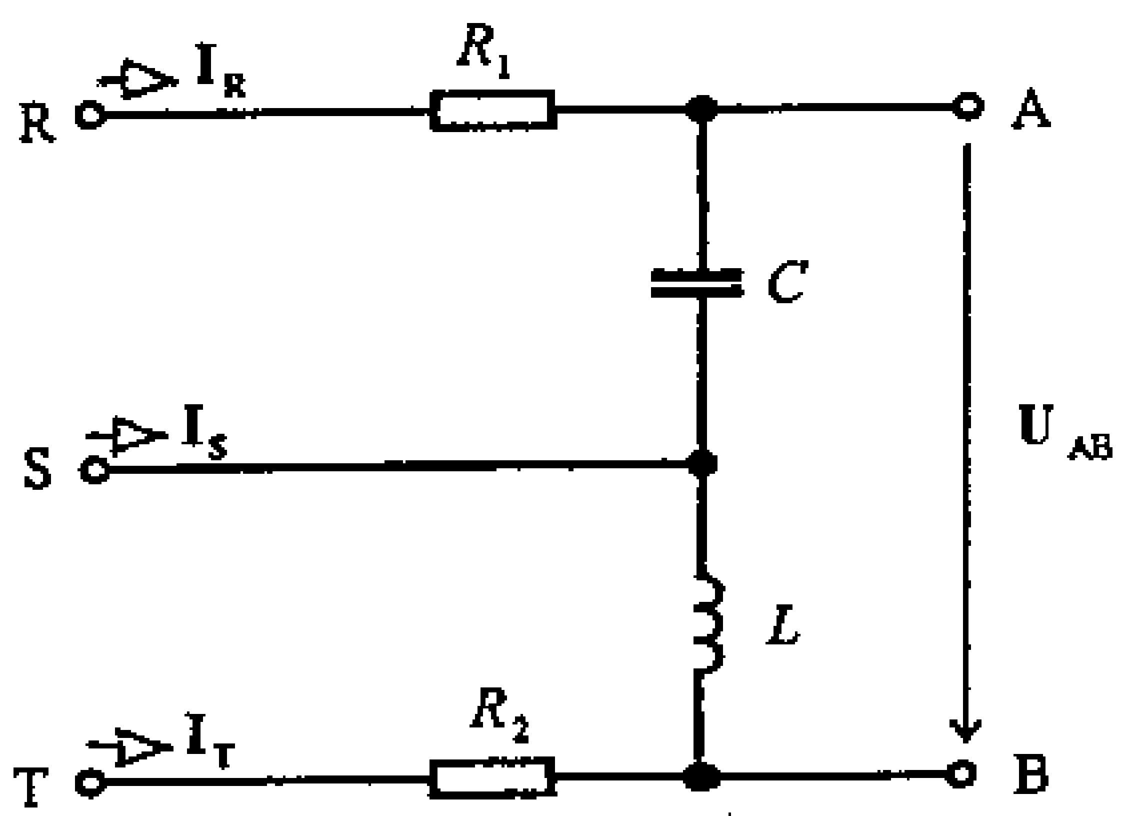
Příklad 5.1

Celkem 7 bodů

Obvod podle obr. je napájen z trojfázového zdroje o kmitočtu f = 50 Hz, jehož fázory napětí v měřítku efektivních hodnot jsou $\mathbf{U}_{RS}$ = 380 V, $\mathbf{U}_{ST}$ = 380 $e^{-j2\pi/3}$, $\mathbf{U}_{TR}$ = 380 $e^{+j2\pi/3}$. Vypočítejte fázor napětí $\mathbf{U}_{AB}$ a jeho časový průběh $u_{AB}(t)$ v ustáleném stavu, je-li $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, L = 0,3183 H, C = 15,915 μF.

Nakreslete zapojení wattmetrů pro měření činného výkonu dané nesouměrné zátěže a uveďte vztah pro určení celkového činného výkonu z údajů jednotlivých wattmetrů.

R



Obr. 1

Příklad 5.2

Celkem 11 bodů

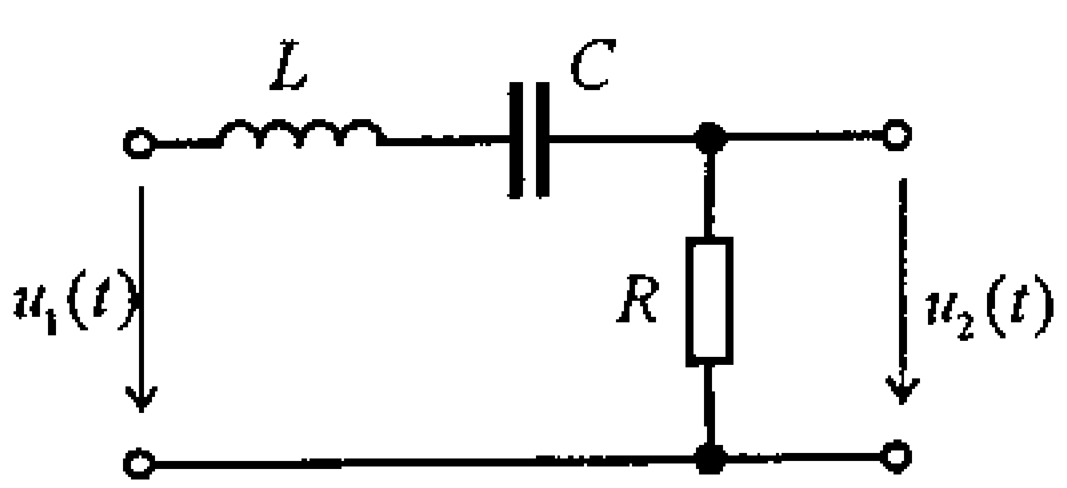
Obvod podle obr. 2 se v čase t = 0 připojí na zdroj periodického obdélníkového napětí $u_1(t)$ o kmitočtu f = 50 Hz, pro nějž platí

$$u_1(t) = 10 \text{ V pro } 0 < t < 10 \text{ ms}$$

$$u_1(t) = 0 \text{ V pro } 10 \text{ ms} < t < 20 \text{ ms}$$

Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ v první půlperiodě budicího signálu (pro $0 < t < 10$ ms), byl-li obvod v čase t = 0 bez energie. Parametry obvodu jsou $R = 1200\ \Omega$, L = 10 mH, C = 10 000 pF. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor.

V ustáleném stavu má být průběh napětí $u_2(t)$ sledován na osciloskopu, pro zobrazení detailu případných překmitů bude použita časová lupa. Nakreslete blokové schéma vysvětlující princip osciloskopu včetně bloků zajišťujících synchronizaci ČZ (spouštěná ČZ). Načrtněte typické průběhy na vstupu a výstupu těchto bloků. Vysvětlete princip časové lupy.

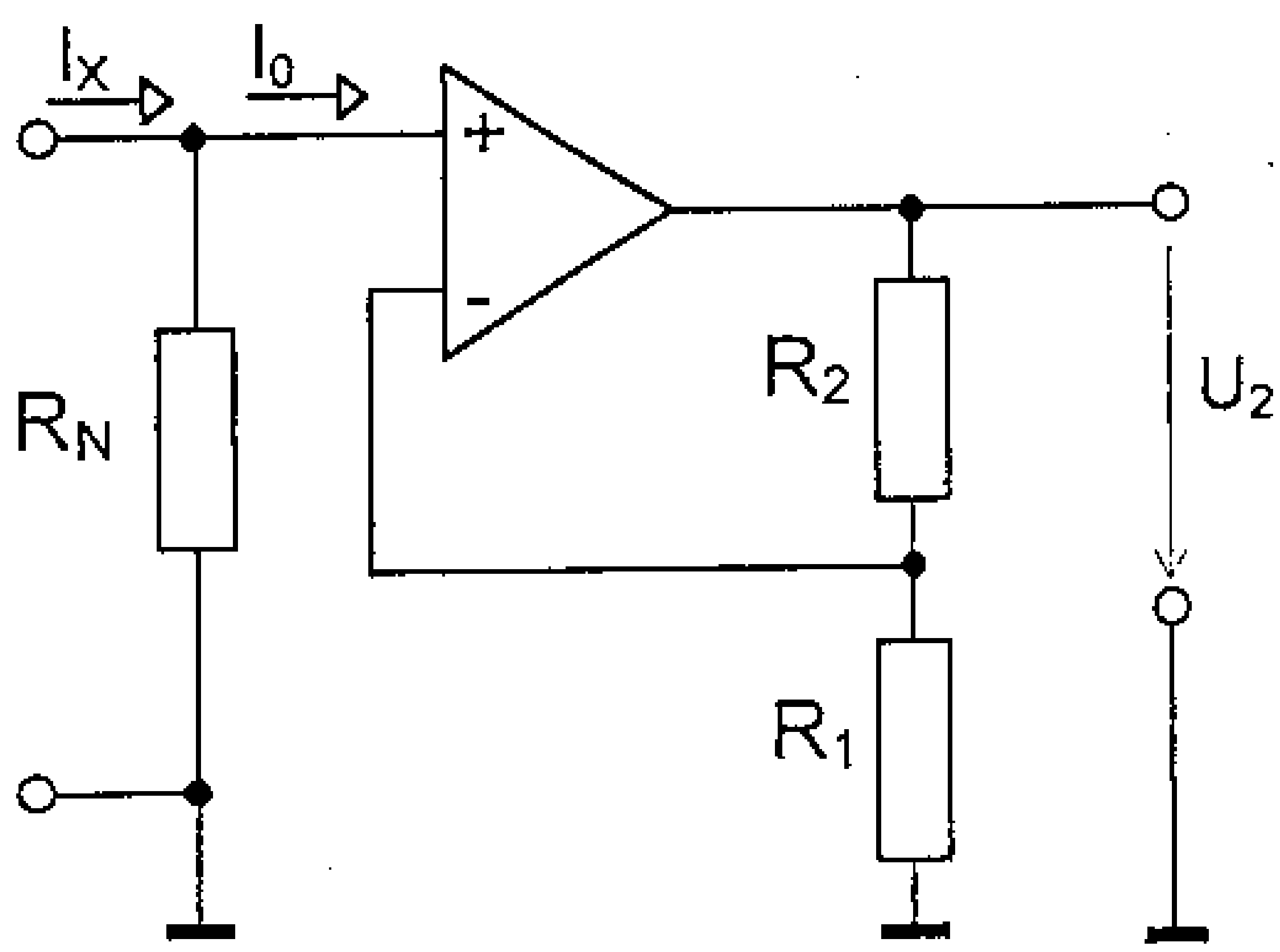


Obr. 2

18.9.1997

Příklad 5.3 celkem 7 bodů

Obvod podle obr. obsahující operační zesilovač je použit pro měření malého proudu. Vypočtěte velikost odporu R_N za předpokladu ideálního operačního zesilovače tak, aby při hodnotě odporů $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 99\,\mathrm{k}\Omega$ byl převod zesilovače 0,01 μA → 1 V. Stanovte maximální chybu měření proudu $I_X = 0{,}05\ \mu\mathrm{A}$, je-li přesnost použitých odporů 0,1% a vstupní klidový proud OZ $|I_0| < 0{,}1$ nA (vstupní napěťovou nesymetrii zanedbejte). Výstupní napětí je měřeno číslicovým voltmetrem s udanou chybou 0.03% z údaje + 0.01% rozsahu, jehož vstupní odpor je 10 MΩ. Použitý rozsah voltmetru je 10 V.



Příklad 5.4 Celkem 6 bodů

Vodivá koule o poloměru R=10cm je umístěna ve vzduchu a nabita neznámým nábojem Q_0 [C].

Vypočítejte velikost tohoto náboje Q_0 [C] a jeho plošnou hustutu σ_0 [C/m²].

Zjistěte, zda není na povrchu vodivé koule překročena elektrická pevnost vzduchu E_{max}=33kV/cm, je-li potenciál na povrchu koule φ_R=0V a ve vzdálenosti r=2R je φ_{2R}=450V.

$$\varepsilon_o = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m \quad \mu_o = 4\pi 10^{-7} H/m$$

Příklad 5.5 Celkem 4 body

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří ve směru kladné osy z v neohraničeném prostředí s parametry ε_r=1,4; μ_r=1; $\sigma/\omega\varepsilon=10^4$. Kmitočet vlny je f=150MHz.

Vypočítejte vzdálenost, na které se amplituda intenzity elektrické složky zmenší na polovinu a napište vztah pro okamžitou hodnotu intenzity elektrického pole v tomto místě, je-li v čase t=0s a v místě z=0m maximální hodnota intenzity elektrického pole rovna $E_{max}=10^{-3}$ V/m.

Jak velký je fázový posun mezi $\hat{E}_x$ a $\hat{H}_y$ v této vlně?

8.7.1997

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

9.1. Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4t + 2e^t$$

s počátečními podmínkami $x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = 6.$

5 bodů

9.2. Příklad: Rozviňte v sinovou Fourierovu řadu funkci f,

$$f(t) = 1 - t, \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

5 bodů

9.3. Příklad: Nalezněte všechny extrémy funkce

$$f(x, y) = 3x^2 + y^3 - 6xy - 9y + 2.$$

10 bodů

9.4. Příklad: Nalezněte všechna komplexní čísla z, pro která platí

$$\sin 3z = 2\pi.$$

5 bodů

9.5. Příklad: Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle -1, 3 \rangle$.
Nechť $Y = X^2 - 2X$.
Vypočtěte:
a) hustotu $g(y)$ náhodné veličiny Y,
b) pravděpodobnost $P(Y \in \langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle)$,
c) střední hodnotu $E(Y)$ a rozptyl $D(Y)$.

10 bodů

8.7.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

9-1

Po nakloněné rovině o délce $s = 5\ m$ se začne z jejího horního konce v čase $t = 0$ valit (bez smyku) homogenní těleso tvaru plného válce. Měřením bylo zjištěno, že doba, během níž těleso projde po celé délce nakloněné roviny, je $t = 2\ s$.
Určete
a) Jaká je rychlost pohybu těžiště válce na konci dráhy,
b) jaký úhel svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou.
(Moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho rotační ose je roven $J_o = m R^2 /2$, kde m je hmotnost válce a R jeho poloměr.)

(max. 8 bodů)

9-2

a) Popište Carnotův tepelný stroj. Jaká je významná vlastnost tohoto stroje?

b) Spočítejte změny entropie ideálního plynu v jednotlivých částech Carnotova cyklu a vysvětlete, proč je celková změna entropie za celý cykl rovna nule.

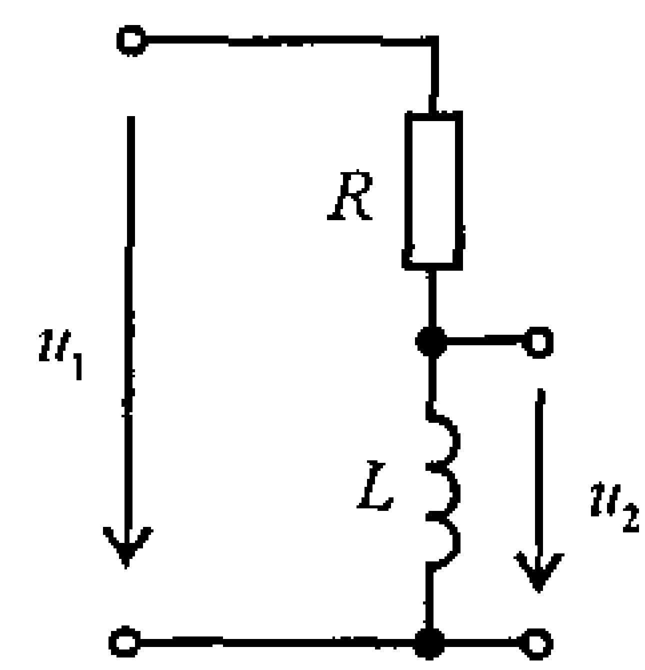
(max. 7 bodů)

Příklad 9.1

Celkem 7 bodů

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje periodického napětí $u_1(t) = 5 + 10 \sin (10000\ t)$ [V]. Vypočtěte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ v ustáleném stavu a jeho efektivní hodnotu, je-li $R = 300\ \Omega$, $L = 17{,}32$ mH.

Uveďte principiální možnosti měření efektivní hodnoty výstupního napětí v tomto případě.



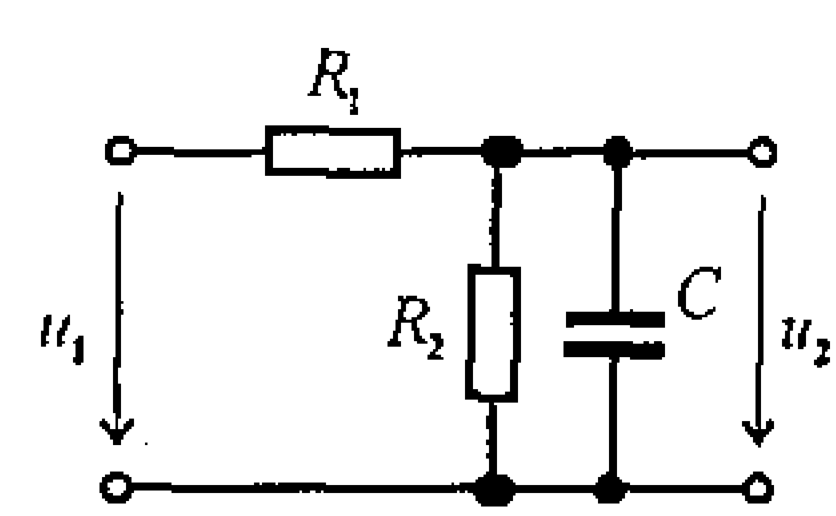
obr. 1

Příklad 9.2

Celkem 11 bodů

Obvod podle obr. 2 se v čase $t = 0$ připojí na zdroj harmonického napětí $u_1(t) = 10 \sin (100\ 000\ t)$. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro $t > 0$, byl-li kapacitor pro $t < 0$ bez náboje. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $C = 20\ 000$ pF. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor.

Fázový rozdíl vstupního a výstupního napětí v ustáleném stavu je měřen osciloskopem v režimu X - Y. Jak určíte fázový rozdíl z obrazce, který vznikne na obrazovce? Jaká chyba metody může při tom vznikat a jak určíte její velikost? Nakreslete blokové schéma osciloskopu pro měření v tomto režimu.

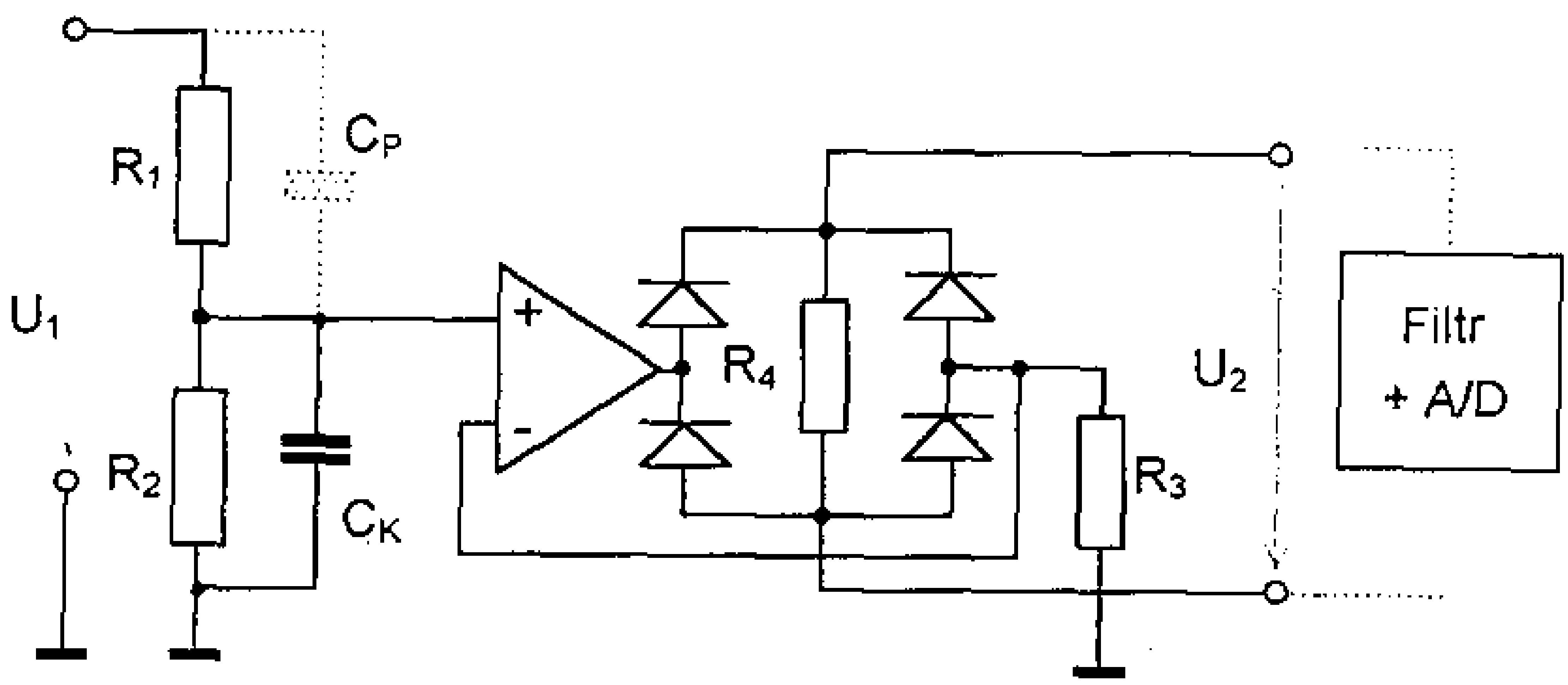


obr. 2

8.7.1997

celkem 7 bodu

Obvod podle obr. obsahuje ideální operační zesilovač a čtveřici diod. Vypočtěte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ a jeho střední hodnotu, je-li vstupní napětí $u_1(t) = 141 \sin 100000t$ [V] a odpory $R_1 = 9{,}9\ \mathrm{M\Omega}$, $C_P = 9\ \mathrm{pF}$, $R_2 = 100\ \mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 900{,}3\ \Omega$, $R_4 = 1\ \mathrm{k\Omega}$. Určete hodnotu kapacity kompenzačního kondenzátoru C_K tak, aby vstupní napěťový dělič byl frekvenčně nezávislý. S jakou max. možnou chybou bude měřeno napětí $u_1(t)$, je-li odchylka od jmenovité hodnoty použitých rezistorů menší než 0,1% a AD převodník s rozsahem 2 V použitý pro měření výstupního napětí má udanou chybu 0,1% z údaje + 0,05% z rozsahu?



Příklad 9.4

Celkem 6 bodů

Vodivý válec (R = 5 mm) je nabit neznámým nábojem τ_0 [C/m] a je umístěn ve vzduchu (ε_0). Ve vzdálenosti $r_1 = 10$ cm je potenciál elektrostatického pole $\varphi_1 = 100$ V a ve vzdálenosti $r_2 = 0{,}2$ m je potenciál $\varphi_2 = 30$ V.

Vypočítejte: 1/ velikost náboje τ_0 na vodivém válci

2/ hustotu energie elektrostatického pole v dielektriku.

Příklad 9.5

Celkem 4 body

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 2.10^{-4}$ S/m. Kmitočet vlny je 45 kHz. V daném místě byla změřena střední hodnota Poyntingova vektoru 10 mW/m^2.

Vypočítejte: fázory intenzity elektrického a magnetického pole v tomto místě.

$\varepsilon_0 \doteq 10^{-9}/36\pi$ F/m $\qquad$ $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

Výpočetní technika

Zadání a řešení příkladů k první souborné zkoušce

Teorie — 7 bodů

9.1 **Zadání:**

Proč musí být v deklaraci typu ukazatel uveden doménový typ.

aby překladač věděl jak s daty zacházet

9.2 **Zadání:**

Jaké operace jsou charakteristické pro datový typ fronta?

PUSH, POP, kontrola naplnění

9.3 **Zadání:**

Vysvětlete rozdíl mezi logickými obvody se standardním výstupem, třístavovým výstupem a s výstupem s otevřeným kolektorem.

9.4 **Zadání:**

Co je doplňkový kód? Jak jsou v něm čísla zobrazena? Jak se pozná obraz záporného čísla? Jak se v tomto kódu provádí sčítání a jak se při něm pozná přeplnění? (Uvažujte pouze dvojkovou soustavu.) Najděte obrazy čísel -3 a -6 a obraz jejich součtu v doplňkovém kódu, pro tuto reprezentaci uvažujte čtyřbitovou řádovou mřížku. znaménko určeno prvním bitem, který je souč. kódu

sčítání – sečtou se obrazy a ignoruje se přenos

9.5 **Zadání:**

Toto je aktuální obsazení registrů a části paměti počítače s procesorem 8086:

```
    AH AL       BH BL       CH CL      DH DL
AX  FF FF   BX  11 C5   CX  D0 C5   DX 3A EE

 SP  0F FF  SI  00 00  IP  00 03
 BP  00 00  DI  00 00
 SS  15 74  DS  15 74  CS  15 74

     15730:   00 00 00 00 00 00 00 00
     15738:   00 00 00 00 00 00 00 00
     15740:   B8 34 12 8B D8 F7 D8 03
     15748:   C3 F7 D3 CC 2B C0 50 B8
     15750:   03 00 50 8D 86 78 FF 50
```

Která strojová instrukce (napište její adresu a její první slabiku) se bude vykonávat jako příští a proč?

9.6 Zadání:

Jaký výstup produkuje následující fragment programu?

```
procedure ONE;

     procedure TWO(A:integer; var B:integer);
                    var N:integer;
     begin
          N:=2;
          A:=A+B-N;
          writeln(N:5,A:5,B:5);
     end;

     var X:integer;
begin
     X:=5;
     TWO(3,X);
     writeln(X);
end;
```

Syntéza 6 bodů

9.7 Zadání:

Napiste proceduru, ktery zjisti, zda se v zadanem textovem souboru vyskytuje zadane slovo. Slova jsou od sebe oddelena mezerami resp. novymi radky.

19.4.1997

PRVNÍ SOUBORNÁ ZKOUŠKA

MATEMATIKA

Každý příklad řešte na samostatném listě. Zadání každého příkladu vždy opište a obvyklým způsobem vyznačte požadované výsledky.

1.1. Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 12e^{3t} + 2t^2$$

s počátečními podmínkami $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 6$.

5 bodů

1.2. Příklad: Je

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} \cos(kt) + \frac{(-1)^k}{k^2+1} \sin(kt) \right).$$

Určete 3. harmonickou funkce F, tj. koeficienty a_3 a b_3, je-li

$$F(t) = \int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z.$$

5 bodů

1.3. Příklad: Prověřte, které z bodů $A = [0,1]$, $B = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $C = [\frac{1}{2}, 1]$ jsou stacionární body funkce

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

a vypočtěte, zda v nich f má lokální extrém. Určete typ extrému.

10 bodů

1.4. Příklad: K harmonické funkci u,

$$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y) - \frac{y}{x^2+y^2},$$

nalezněte holomorfní (regulární) funkci $f(z)$ takovou, že $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$.

5 bodů

1.5. Příklad: Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, kde veličina X má diskrétní rozdělení takové, že $P(X = 0) = 0{,}8$ a $P(X = 1) = 0{,}2$, a veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,3)$.

Stanovte:

a) distribuční funkci F náhodné veličiny Y,

b) hustotu pravděpodobnosti h náhodné veličiny $Z = X + Y$,

c) pravděpodobnost $P(Z \in (1,2))$.

10 bodů

19.4.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

1-1

Těleso o hmotnosti $m_1 = 3\ kg$ se pohybuje rychlostí $v_1 = 4\ m/s$ a narazí do tělesa stejné hmotnosti, jež je v klidu. Za předpokladu, že tato srážka je dokonale nepružná, určete

a) jaká je rychlost tělesa (obou těles) po srážce,

b) jaké množství energie celkem se spotřebuje na deformaci a ohřátí těles při srážce a případné zvukové efekty.

(max. 7 bodů)

1-2

a) Formulujte Keplerovy zákony.

b) Pomocí zákonů dynamiky a vztahů pro gravitační pole dokažte platnost třetího Keplerova zákona pro speciální případ dvou planet, které se pohybují po drahách ve tvaru kružnic.

(max. 8 bodů)

```
begin
   X:=X-1;
   Y:=Y+1;
   Z:=Y
end;
begin
   A:=5;
   Proc(A,A,B);
   writeln(A:2,B:2);
   Proc(A,A-2,A);
   writeln(A:2)
end.
```

Syntéza

6 bodů

1.7 Zadání:

Napište program, který přečte dvě neklesající posloupnosti kladných čísel zakončené 0 a vypiše neklesající posloupnost, která vznikne sloučením vstupních posloupností (Počet vstupních údajů nepřesáhne 100, použijte přímé zatřiďování. bez použití algoritmu řazení).

Příklad vstupu:

```
2 5 9 11 34 0
3 4 12 13 0
```

výstup:

```
2 3 4 5 9 11 12 13 34
```

19.4.1997

Z1

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie 7 bodů

procedure proc(X:real; Procedure pr(fx:integer)

1.1 Zadání:

Vysvětlete, co je proměnná (parametr) typu procedura a k čemu se používá.

– předávání procedury která má být na nějakom akci určité procedury použite

1.2 Zadání:

Vysvětlete co jsou syntaktické diagramy a k čemu slouží.

grafické vyjadření problému, názorné vysvětlení fce progr.

1.3 Zadání:

Vysvětlete základní rozdíl mezi kombinačními a sekvenčními obvody.

1.4 Zadání: IP

Co je programový čítač a co je registr instrukcí? Co obsahují? Co se provádí v rámci základního cyklu počítače (instrukčního cyklu), jak a kdy se při něm mění obsahy uvedených registrů?

1.5 Zadání:

Vysvětlete funkci následujícího fragmentu programu pro mikroprocesor I8086 a okomentujte jednotlivé instrukce:

```
           ...
           ...
NOVEMAX:   mov   AL,[SI]
           mov   DX,SI
DALSIPRV:  dec   CX
           jz    KONEC
           inc   SI
           cmp   AL,[SI]
           jb    NOVEMAX
           jmp   DALSIPRV
KONEC:     ...
```

Analýza 2 body

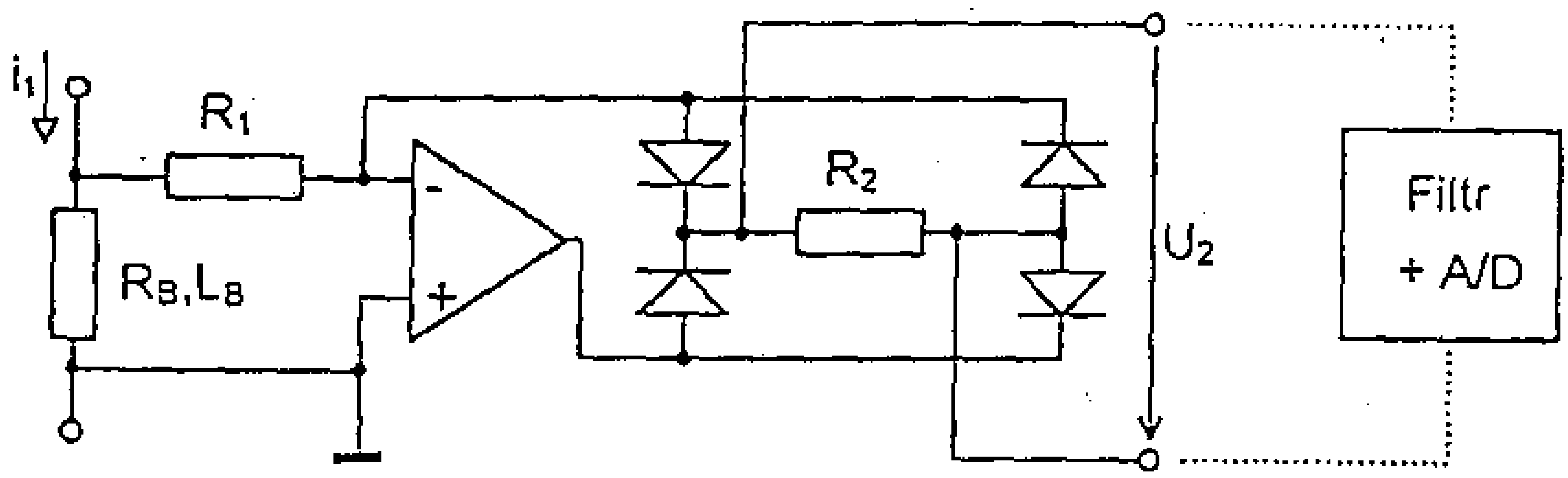
1.6 Zadání:

Co vypíše následující program?

```
program Test(output);
var A,B:integer;
procedure Proc(var X:integer; Y:integer; var Z:integer);
```

Příklad č. 1.3 19.4.1997 Celkem 7 bodů

Obvod podle obr. obsahuje ideální operační zesilovač a čtveřici diod. Vypočtěte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ a jeho střední hodnotu, je-li měřený proud $i_1(t) = 1{,}414 \sin 100000t$ [A], odpor $R_1 = 9{,}003\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$, $R_B = 0{,}1\ \Omega$ v serii s parazitní indukčnosti $L_B = 0{,}1\ \mu\mathrm{H}$. S jakou max. možnou chybou bude měřen tento proud, je-li odchylka od jmenovité hodnoty použitých rezistorů menší než 0,1% a AD převodník s rozsahem 0,2 V (použitý pro měření výstupního napětí) má udanou chybu 0,1% z údaje + 0,05% z rozsahu? Rozhodněte, zda lze v tomto případě zanedbat kmitočtovou závislost použitého bočníku.



Příklad č. 1.4 Celkem 4 body

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíři v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 1{,}3.10^4$ S/m. Kmitočet vlny je f = 1 MHz.

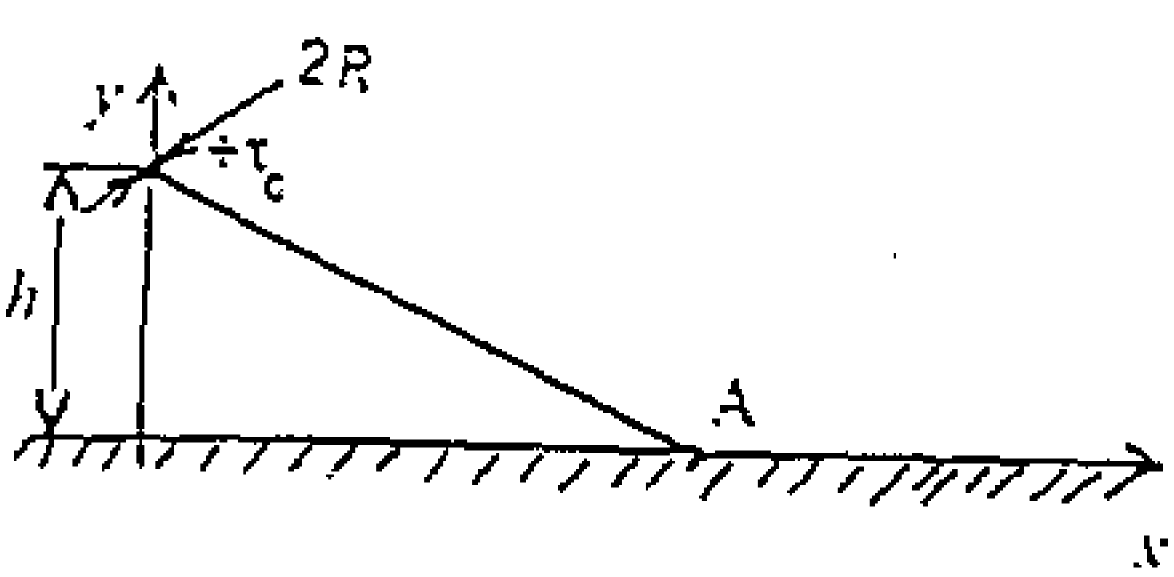
Vypočítejte: 1) Ekvivalentní hloubku vniku δ

2) Okamžitou hodnotu Poyntingova vektoru v místě z = 2 δ

Intenzita elektrického pole má směr osy x a v čase t = 0 s v místě z = 0 m dosahuje svého maxima $E_{x\,max} = 1$ V/m.

Příklad č. 1.5 Celkem 6 bodů

Ve výšce h = 10 m nad vodivou rovinou je vodorovně s ní umístěn vodič (R = 5 mm). Určete vztah pro rozložení náboje na zemi, je-li mezi vodičem a zemí napětí U = 200 V. Stanovte jeho plošnou hustotu na rovině v bodě A.



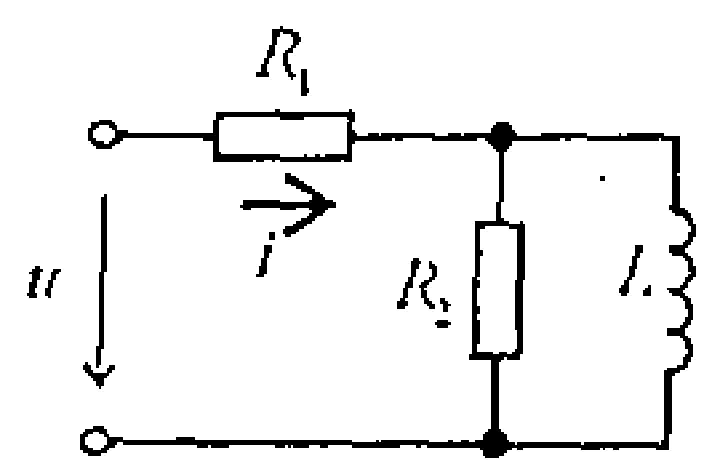
$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$

Příklad č. 1.1

Celkem 7 bodů

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje napětí $u(t) = 5 + 10 \sin(1000\, t)$ [V]. Vypočítejte časový průběh proudu $i(t)$ a jeho efektivní hodnotu I v ustáleném stavu, je-li $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $L = 0.2$ H.

Uveďte možnosti měření efektivní hodnoty proudu pro tento případ.



Obr. 1

Příklad č. 1.2

Celkem 11 bodů

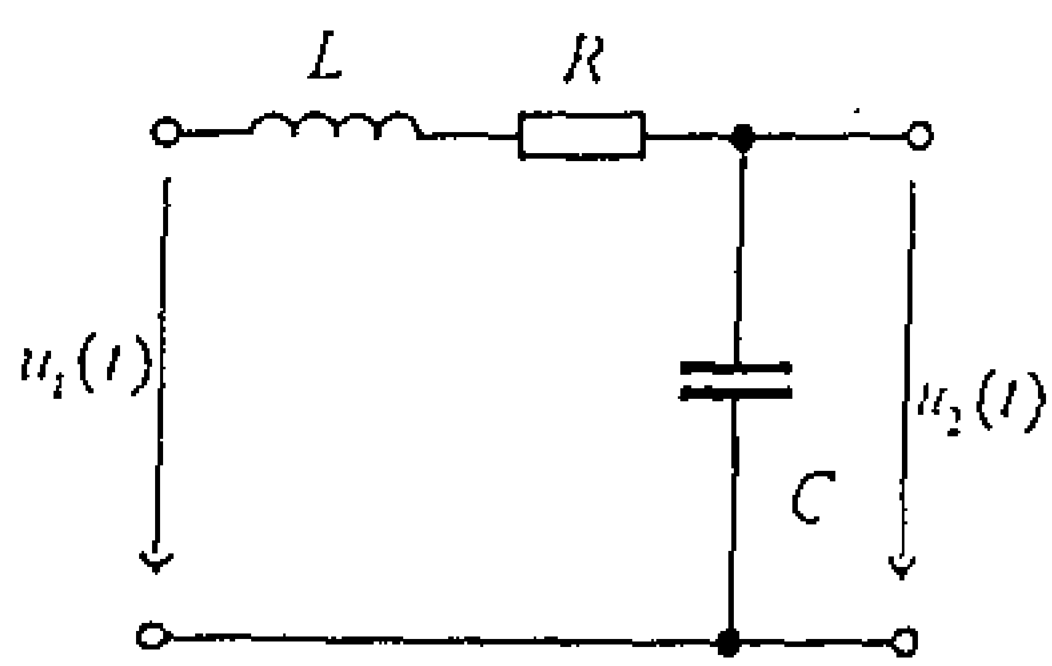
Obvod podle obr. 2 s parametry $R = 500\ \Omega$, $L = 5$ H, $C = 125\ \mu$F se v čase $t = 0$ připojí na zdroj periodického obdélníkového napětí o frekvenci $f = 20$ Hz pro nějž platí

$u_1(t) = 0$ V pro $0 < t < 25$ ms

$u_1(t) = 10$ V pro 25 ms $< t < 50$ ms

Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ v první periodě budicího signálu pro $0 < t < 50$ ms, byl-li obvod pro $t < 0$ bez energie.

Pro měření frekvence (periody) vstupního signálu je použit čítač. Nakreslete jeho blokové schéma v režimu měření doby periody a vysvětlete, proč je pro výše uvedené parametry signálu tento režim výhodnější než přímé měření frekvence.



Obr. 2

23.11.1996

Příklad: Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} + 2x = f(t)$$

$t \in (0, +\infty)$, s počáteční podmínkou $x(0_+) = -4$, kde

$$f(t) = \begin{cases} 8t & \text{pro } t \in (0, 3) \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Příklad: Určete 1. harmonickou funkce, která je periodickým prodloužením funkce

$$f(t) = \max\{\cos t, 0\}, \quad \text{pro } t \in \langle -\pi, \pi).$$

Příklad: Nalezněte extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

na množině $M = \{(x, y, z);\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\}$.

Příklad: Nalezněte všechna komplexní čísla z, pro která platí

$$\cos z + \sin z = 2.$$

Příklad: Nezávislé náhodné veličiny X a Y mají obě normální rozdělení $N(0, 1)$. Nechť

$$D_1 = \{(x, y);\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}, \quad D_2 = \{(x, y);\ |x| < |y|\}.$$

Vypočtěte

a) pravděpodobnosti $P((X, Y) \in D_1)$ a $P((X, Y) \in D_2)$.

b) střední hodnoty $E(X^2)$ a $E(XY)$.

(Pozn. Hustota pravděpodobnosti rozdělení $N(0, 1)$ je dána vztahem $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ pro $t \in \mathbb{R}$.)

23.11.1996

Těleso je vrženo šikmo vzhůru pod úhlem $\alpha = 45°$ vzhledem k horizontále počáteční rychlostí o velikosti v_0. Odpor vzduchu se neuvažuje.

Určete velikost a) rychlosti, tečného a normálového zrychlení v čase t po okamžiku vrhu,
b) rychlosti, tečného a normálového zrychlení ve vrcholu dráhy tělesa.
Jedná se o pohyb v homogenním gravitačním poli.

a) Určete maximální vlnovou délku dopadajícího světla, při níž ještě dojde k vnějšímu fotoelektrickému jevu u platiny a cesia. Výstupní práce elektronu v uvedených kovech jsou $W_{Pt} = 6{,}3$ eV a $W_{Cs} = 1{,}9$ eV.

b) Určete maximální rychlost elektronů emitovaných z těchto kovů při ozáření světlem o vlnové délce $\lambda = 400$ nm.

Jsou dány hodnoty fyzikálních konstant $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

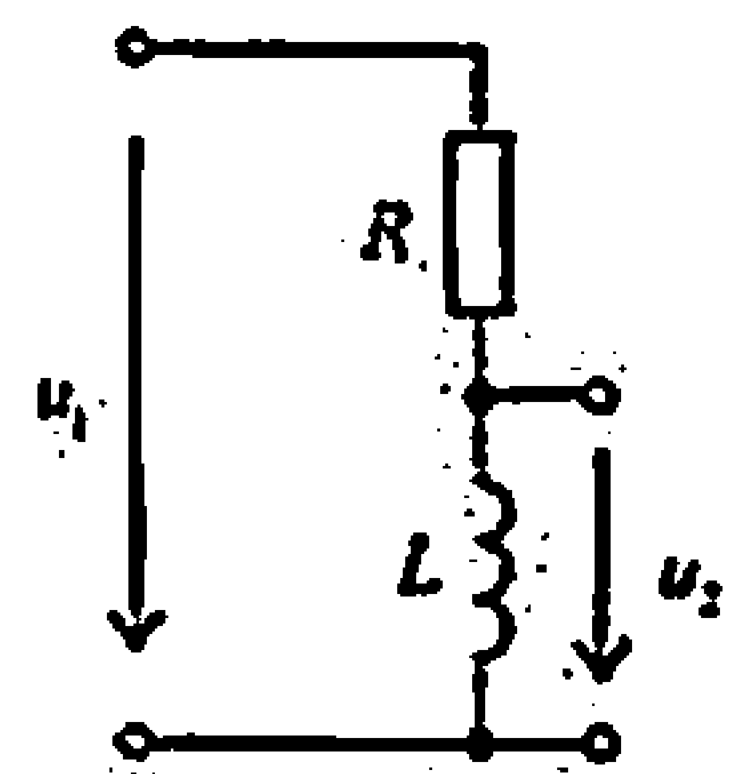
23.11.1996

Obvod podle obr. je napájen ze zdroje periodického napětí $u_1(t) = 5 + 10 \sin(10000\,t)$ [V].

Vypočtěte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ v ustáleném stavu a jeho efektivní hodnotu, je-li $R = 100\ \Omega$, $L = 17{,}32$ mH.

Uveďte principiální možnosti měření efektivní hodnoty výstupního napětí v tomto případě.

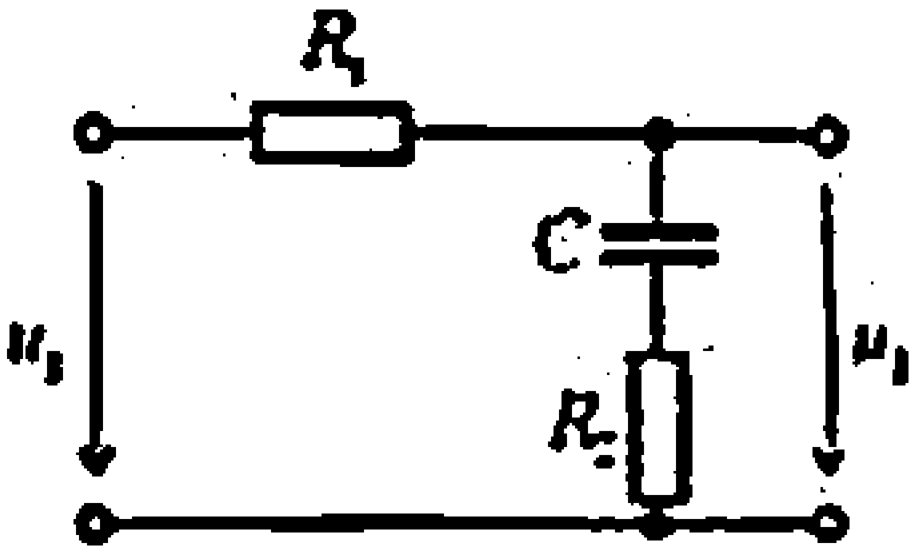
Cívka L je tvořena toroidním vinutím na nemagnetickém jádře kruhového průřezu, jehož vnitřní poloměr $r_1 = 40$ mm, vnější poloměr $r_2 = 60$ mm. Určete potřebný počet závitů pro dosažení požadované indukčnosti. Závity jsou podél obvodu rovnoměrně navinuty.



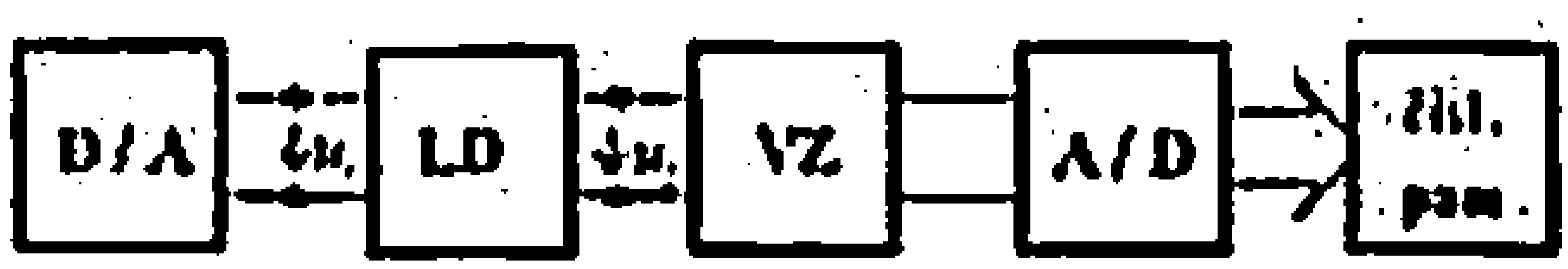
obr. a)

Lineární dvojbran podle obr. b) je zapojen v měřicím řetězci pro automatizovaný záznam přechodného děje podle obr. c).

Vypočtěte časový průběh výstupního napětí dvojbranu $u_2(t)$, jestliže budicí D/A převodník generuje na vstupu dvojbranu v čase $t = 0$ napěťový skok z hodnoty $U_{11} = 10$ V na hodnotu $U_{12} = 5$ V, tj. $u_1(t) = 10 - 5 \cdot \mathbb{1}(t)$. Parametry prvků dvojbranu jsou $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $C = 10\ \mu$F. Předpokládejte, že výstupní odpor D/A převodníku je roven nule, vstupní odpor vzorkovače je nekonečný. Vypočtený průběh znázorněte graficky. Jaký typ AD převodníku použijete, máte-li vzorkovat s rozlišovací schopností 12 bitů alespoň 500 bodů od počátku přechodného děje do okamžiku, kdy odchylka od ustáleného stavu bude přibližně 5%. Nakreslete blokové schéma vysvětlující princip použitého převodníku.

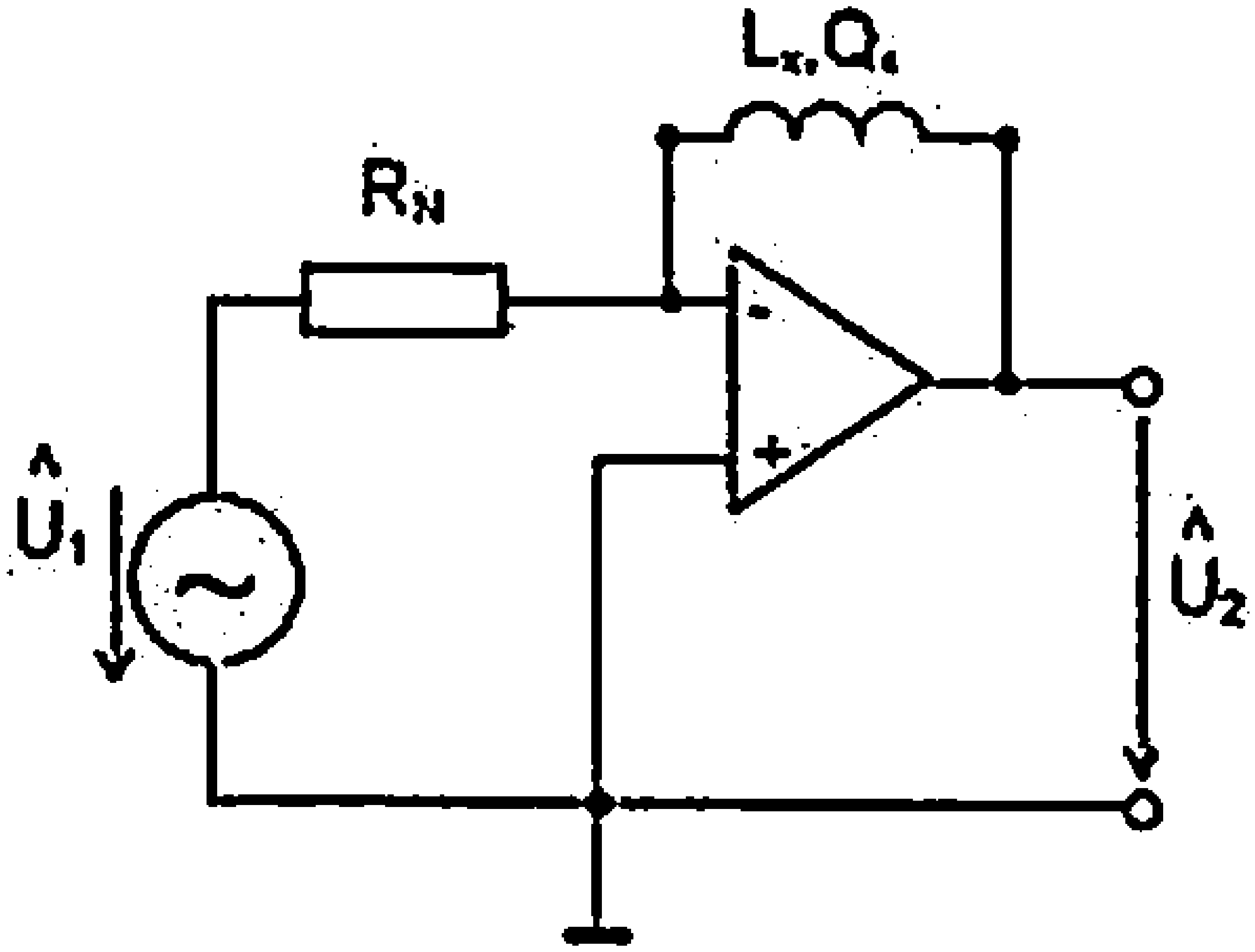


obr. b)



obr. c)

Obvod podle obr. je použit pro měření indukčnosti a činitele jakosti cívky reprezentované seriovým spojením induktoru L_X a resistoru R_X. Vypočtěte přenos daného obvodu $P(j\omega) = U_2/U_1$ a nakreslete jeho asymptotické kmitočtové charakteristiky v logaritmických souřadnicích. Určete L_X a R_X měřené cívky (seriové náhradní schema), je-li hodnota referenčního rezistoru $R_N = 10\ k\Omega$, referenční napětí $U_1 = 10.00$ V, použitý kmitočet 1591.5 Hz a vektorvoltmetrem bylo změřeno výstupní napětí $U_2 = -(0.5 + j5.00)$ V. Dále určete hodnotu činitele jakosti měřené cívky Q_X.



Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří v kladném směru osy z v prostředí s parametry $\varepsilon_r = 1{,}5$; $\mu_r = 1$ a $\sigma = 1{,}3 \cdot 10^4$ S/m. Kmitočet vlny je $f = 5$ kHz. Intenzita elektrického pole nabývá v čase $t = 0$ s a v místě $z = 0$ m svého maxima, které je rovno $E_m = 10^{-3}$ V/m.

Vypočítejte:

1) Okamžitou hodnotu vektoru intenzity elektrického pole v místě $z = 2\delta$ a v čase $t = 10^{-4}$ s. (δ je ekvivalentní hloubka vniku).
2) Střední hodnotu Poyntingova vektoru v tomtéž místě.
3) Fázový posun mezi fázory $\hat{E}$ a $\hat{H}$.

23.11.1996

Zadání:
Jaké znáte druhy parametrů procedur a funkcí v jazyce Pascal.

Zadání:
Co všechno je třeba uvést v programu v jazyce Turbo Pascal, abychom mohli číst data z textového souboru jménem MOJEDATA.TXT v aktuálním adresáři?

Zadání:
Toto je aktuální obsazení registrů a části paměti počítače s procesorem 8086:

```
      AH AL        BH BL        CH CL        DH DL
  AX: FF FF    BX: 11 C5    CX: 00 C5    DX: 3A EE

  SP: 0F FF    SI: 00 00    IP: 00 05
  BP: 00 00    DI: 00 00
  SS: 15 74    DS: 15 74    CS: 15 74

    15730:   00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00
    15740:   B8 34 12 8B D8 F7 D8 03 C3 F7 D3 CC 2B C0 50 B8
    15750:   03 00 50 8D 86 78 FF 50
```

Která strojová instrukce se bude vykonávat jako příští? Určete její adresu a první slabiku.

Zadání:
Co je přímý kód? Jak jsou v něm čísla zobrazena? Jak se pozná obraz záporného čísla. Jak se v tomto kódu provádí sčítání a jak se při něm pozná přeplnění? (Uvažujte pouze dvojkovou soustavu.)

Zadání:
Charakterizujte funkční vlastnosti pamětí RAM, ROM, PROM, EPROM a EEPROM z hlediska uchování uložené informace při vypnutí napájecího napětí a možnosti změny uložené informace. Které z uvedených typů pamětí se používají pro konstrukci hlavní paměti počítačů?

23.11.1996

Zadání:

Popište činnost následujícího progtamu.

```
program Cti_A_Pis(input, output);
type NodePtr = ^ Node;
     Node = record
              Elem : integer;
              Left,Right : NodePtr;
            end;
var Root : NodePtr;

procedure Dump(P : NodePtr);
begin
  if P<>nil then
    begin Dump(P^.Left); Write(P^.Elem:8); Dump(P^.Right) end
end;

procedure Insert(E : integer; var P : NodePtr);
begin
  if P = nil then
    begin New(P); P^.Elem:=E; P^.Left:=nil; P^.Right:=nil end
  else if P^.Elem < E
    then Insert(E, P^.Right)
    else Insert(E, P^.Left)
end;

procedure Fill(var P : NodePtr);
var E : integer;
begin
  P:=nil;
  while not eof do
  begin
    Read(E); Insert(E,P)
  end
end;

begin
  writeln
  ('Zadejte posloupnost celych cisel ukoncenou Ctrl^Z a <Enter>');
  Fill(Root);
  Dump(Root);
end.
```

Zadání:

Vytvořte vhodné deklarace pro datovou strukturu spojový seznam celých čísel. Vytvořte funkci, která jako parametry obdrží ukazatel na seznam a jako výsledek vrátí zcela nový seznam, který obsahuje všechna čísla vyskytující se v původním seznamu, avšak každé pouze jednou.

20.9.1996

PSZ Matematika

6.1 Příklad: Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$\dot{x} - x = f(t)$$

$t \in (0, +\infty)$, s počáteční podmínkou $x(0_+) = 2$, kde

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

5 bodů

6.2 Příklad: Určete Fourierovu řadu funkce, která je periodickým prodloužením funkce

$$f(t) = 1 - |t|, \quad \text{pro } t \in (-1, 1).$$

5 bodů

6.3. Příklad: Nalezněte extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 y$$

na množině $M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1\}$. 10 bodů

6.4 Příklad: Nalezněte všechna komplexní čísla z, pro která platí

$$\cos \frac{2\pi z}{z - 1} = 2.$$

5 bodů

6.5. Příklad: Náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} k(1 - xy^2) & \text{pro } x \in (0, 1),\ y \in (0, 1) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Vypočtěte

a) konstantu k,

b) pravděpodobnost $P((X, Y) \in A)$, kde

$$A = \{(x, y);\ x^2 - 2x + y^2 \leq 0\},$$

c) střední hodnotu $E(Y)$.

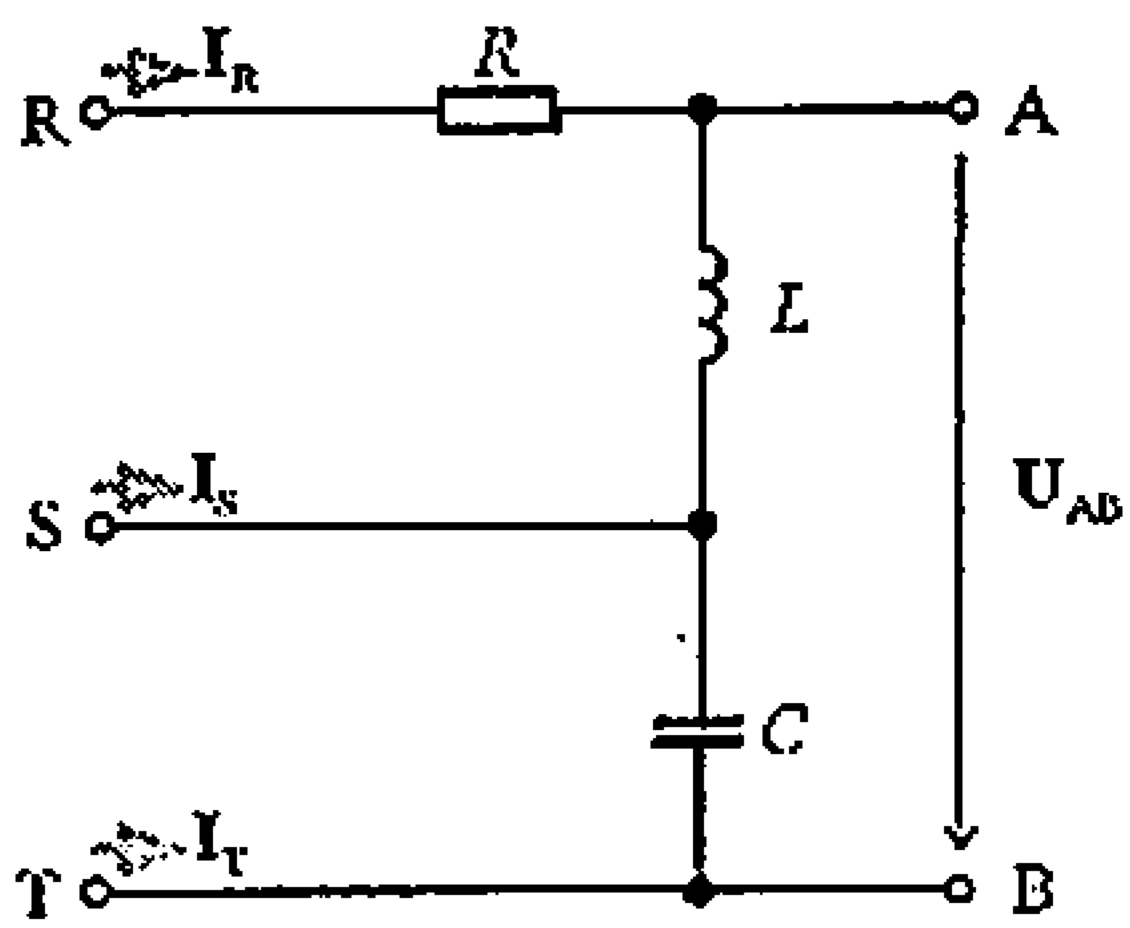
10 bodů

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 6.1 **Celkem 7 bodů**

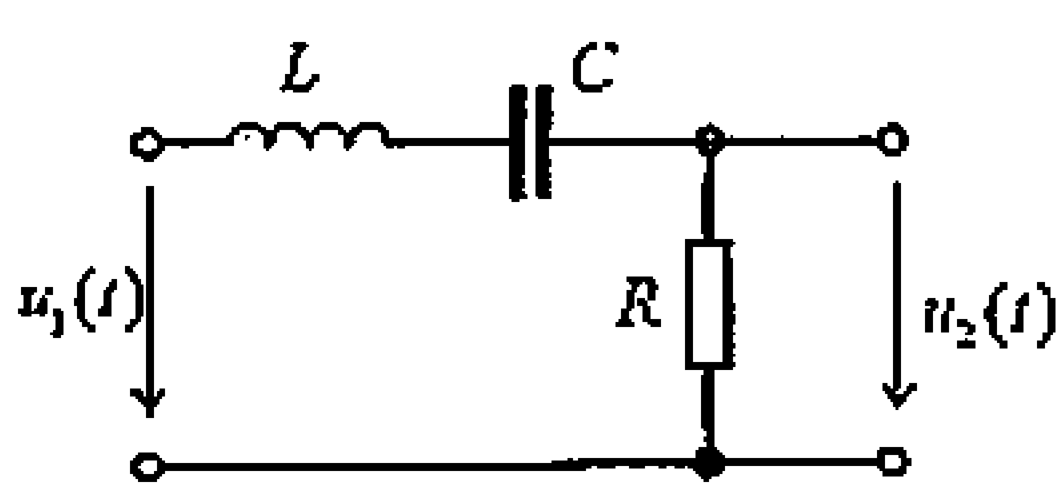
Obvod podle obr. je napájen z trojfázového zdroje o kmitočtu $f = 50$ Hz, jehož fázory napětí v měřítku efektivních hodnot jsou $\mathbf{U}_{RS} = 380$ V, $\mathbf{U}_{ST} = 380\, e^{-j2\pi/3}$, $\mathbf{U}_{TR} = 380\, e^{+j2\pi/3}$. Vypočítejte fázor napětí $\mathbf{U}_{AB}$ a jeho časový průběh $u_{AB}(t)$ v ustáleném stavu a celkový činný výkon, je-li $R = 100\,\Omega$, $L = 0{,}3183$ H, $C = 15{,}915\,\mu$F.

Nakreslete zapojení wattmetrů pro měření činného výkonu dané nesouměrné zátěže a uveďte vztah pro určení celkového činného výkonu z údajů jednotlivých wattmetrů.



Příklad . 6.2 **Celkem 11 bodů**

Obvod podle obr. se v čase t = 0 připojí na zdroj stejnosměrného napětí $U_1 = 10$ V. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$, byl-li obvod pro t < 0 bez energie a parametry obvodu jsou $R = 5\,\mathrm{k}\Omega$, $L = 4$ H, $C = 1\,\mu$F. Načrtněte časový průběh výstupního impulsu a navrhněte zapojení pro měření doby, po kterou je okamžitá hodnota napětí $u_2(t)$ větší než 5 V pomocí čítače. Nakreslete jeho blokové schema vysvětlující princip činnosti v tomto režimu měření.



20.9.1996

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 6.4 **Celkem 4 body**

V neohraničeném prostoru se ve směru kladné osy z šíří rovinná harmonická elektromagnetická vlna. V obecném bodě je fázor vektoru intenzity elektrického pole této vlny dán rovnicí

$$\hat{\vec{E}} = \vec{x}_0 \cdot 10^{-2} \; e^{-j\hat{k}z} e^{-j\pi/4} \quad [V/m]$$

Vypočítejte:
1) fázor vektoru intenzity magnetického pole v obecném bodu prostoru
2) fázový posun mezi $\hat{\vec{E}}$ a $\hat{\vec{H}}$
3) střední hodnotu Poyntingova vektoru
je-li:

$$\varepsilon_r = 4, \quad \mu_r = 1, \quad \sigma = 0 \; S/m, \quad f = 10 GHz$$

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \; F/m \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \; H/m$$

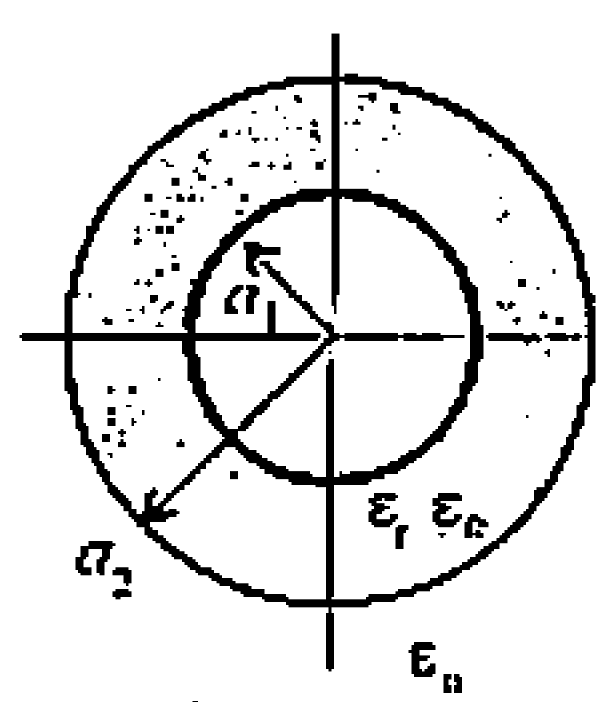
Příklad 6.5 **Celkem 6 bodů**

Vodivý válec nabitý nábojem $\tau_0 = 10^{-9}$ C/m je obklopen soustředným válcovým dielektrikem z materiálu o permitivitě $\varepsilon_r = 2$. V oblasti $r \rangle a_2$ je vzduch.
Určete vztahy pro potenciál ve všech třech oblastech:
$r \le a_1$,
$a_1 \le r \le a_2$,
$r \ge a_2$,

je-li: $\varphi/_{r=a_2} = 0\, V$, $a_1 = 15\; mm$, $a_2 = 45\; mm$

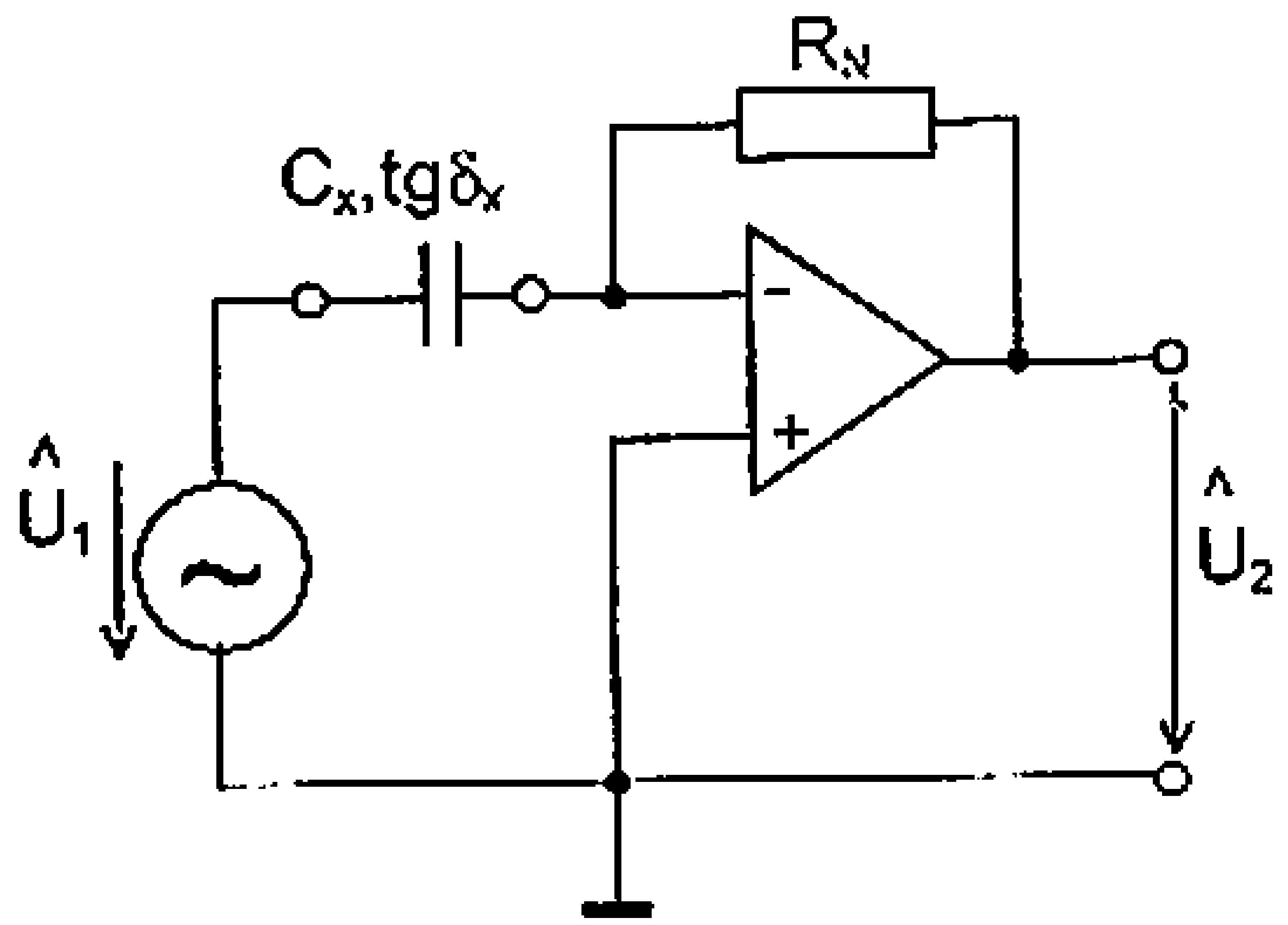
Vypočítejte potenciál $\varphi/_{r=a_1}$

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \; F/m$$



Příklad 1.3 celkem 7 bodů

Obvod podle obr. je použit pro měření kapacity a ztrátového činitele kondensátoru reprezentovaného paralelním spojením kapacitoru C_X a resistoru R_X. Vypočtěte přenos daného obvodu $P(j\omega) = U_2/U_1$ a nakreslete jeho asymptotické kmitočtové charakteristiky v logaritmických souřadnicích. Určete C_X a R_X měřeného kondenzátoru (paralelní náhradní schema), je-li hodnota referenčního rezistoru $R_N = 10\ \mathrm{k\Omega}$, referenční napětí $U_1 = 10.00$ V, použitý kmitočet 1591.5 Hz a vektorvoltmetrem bylo změřeno výstupní napětí $U_2 = 0.02 + j5.00$ V. Určete též hodnotu ztrátového činitele měřeného kondensátoru tgδ.



Příklad 1.4 Celkem 4 body

Potenciál elektrostatického pole je dán funkcí $\varphi = K(xy + 10)$ [V]. Vypočítejte intenzitu elektrostatického pole $\vec{E}$ v bodu (1,1) a tento vektor nakreslete do souřadné soustavy.

Příklad 1.5 Celkem 6 bodů

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří v neohraničeném prostoru s parametry $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\delta = 4$ S/m ve směru kladné osy z.

Amplituda intenzity elektrického pole má v místě $z = 0$ m hodnotu $E_{x\,max} = 1$ mV/m.

Vypočítejte:

1) Vzdálenost d = ?, na které klesne amplituda intenzity elektrického pole na jednu čtvrtinu hodnoty v místě $z = 0$ m.
2) Fázor intenzity magnetického pole v tomto místě.
3) Střední hodnotu Poyntingova vektoru tamtéž.

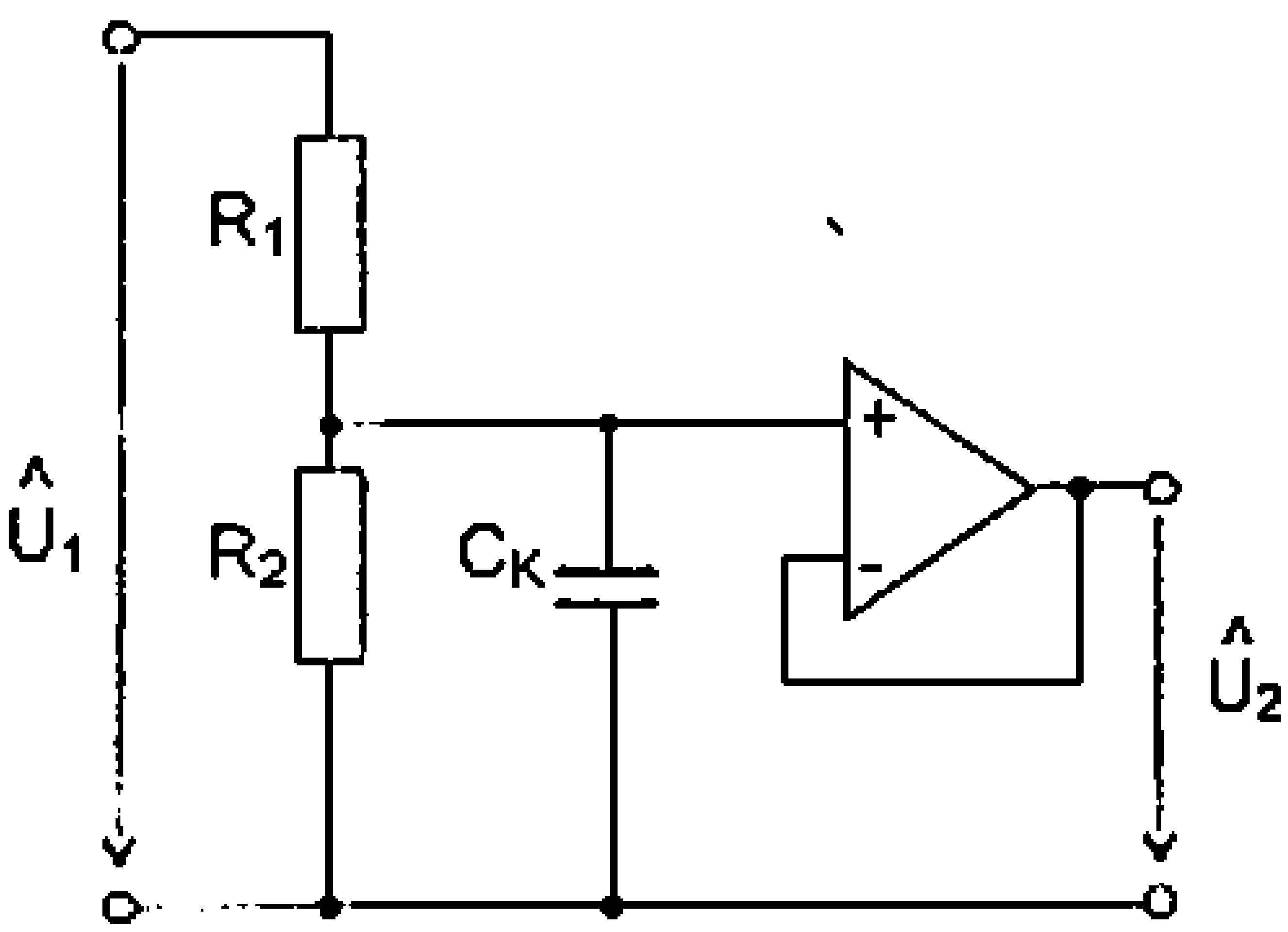
Kmitočet vlny je $f = 100$ MHz.

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \quad F/m$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad H/m$$

Příklad 6.3 **Celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. se vstupním napěťovým děličem a s ideálním operačním zesilovačem má být použit jako vstupní napěťový obvod číslicového wattmetru. Určete přenos napětí $P(j\omega) = U_2/U_1$ tohoto měřicího zesilovače se vstupním napěťovým děličem tvořeným odpory $R_1 = 1\,M\Omega$, $R_2 = 10\,k\Omega$ s parazitními kapacitami $C_1 = C_2 = 20\,pF$. Nakreslete asymptotické kmitočtové charakteristiky tohoto přenosu v logaritmických souřadnicích. Vypočítejte kapacitu kompenzačního kapacitoru C_K, který je nutno připojit paralelně k odporu R_2, tak, aby přenos daného obvodu byl kmitočtově nezávislý. Oddělovací zesilovač považujte za ideální operační zesilovač. Nakreslete blokové schema číslicového wattmetru



$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2 + C_k}{C_1}$$

$$C_k = \frac{R_1 C_1}{R_2} - C_2$$

Výpočetní technika

Zadání příkladů k první souborné zkoušce

Teorie — 7 bodů

6.1 Zadání:
Jaký je rozdíl mezi datovým typem *pole* (array) a *záznam* (record) v Pascalu?

6.2 Zadání:
Jak se od sebe liší soubory typu text a typu file of char v Pascalu?

6.3 Zadání:
Co je stránkování a jak se realizuje? Vysvětlete pojmy *virtuální adresový prostor, fyzický adresový prostor, stránka, stránkový rámec*. Kde je uložena tabulka stránek?

6.4 Zadání:
Vysvětlete rozdíl mezi logickými obvody se standardním výstupem (totem – pole), třístavovým výstupem a s výstupem s otevřeným kolektorem.

6.5 Zadání:
Vysvětlete význam segmentových registrů CS, SS, DS a ES procesoru 8086. Na příkladu jednoho z nich, který si vyberete, naznačte jejich použití.

Analýza — 3 body

6.6 Zadání:
Jaký bude výstup následujícího programu?

```
program TanecZnaku;
var A : array['A'..'F'] of char;
    C : char;
    I : integer;
begin
  for C:='A' to 'F' do A[C]:=' ';
  C:='A';
  while C<='E' do
  begin
    A[C]:=succ(C);
    A[A[C]]:=succ(succ(C));
    C:=succ(A[A[C]])
  end;
  for C:='F' downto 'A' do write(A[C]);
  writeln; readln
end.
```

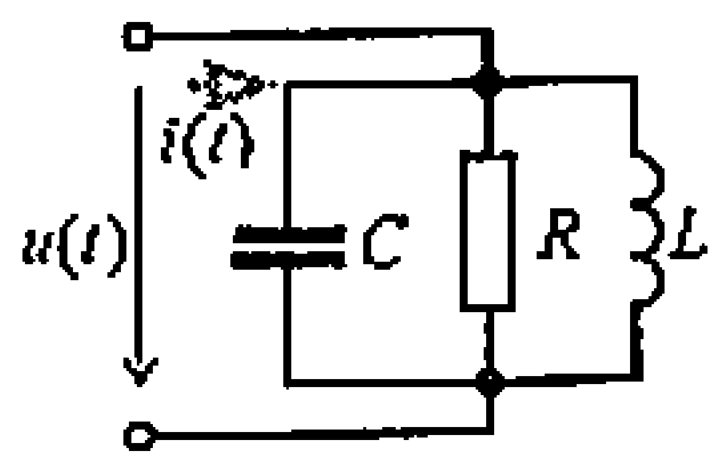
TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA

Příklad 1.1 **Celkem 7 bodů**

Obvod podle obr. 1 je napájen ze zdroje proudu $i(t) = 0.05 + 0.1 \sin(1000\,t)$ [A]

Vypočítejte časový průběh napětí u(t) v ustáleném stavu, je-li R = 200 Ω, L = 0.1 H, C = 15 μF.

Průběh napětí u(t) a proudu i(t) je vzorkován (dvoukanálovým číslicovým osciloskopem, vícekanálovou zásuvnou měřicí kartou apod.) a více než jedna perioda je uložena do paměti počítače. Jak vypočtete z pole vzorků {u} a {i}, uložených v paměti, činný výkon zátěže? Předpokládejte synchronní vzorkování napětí a proudu.

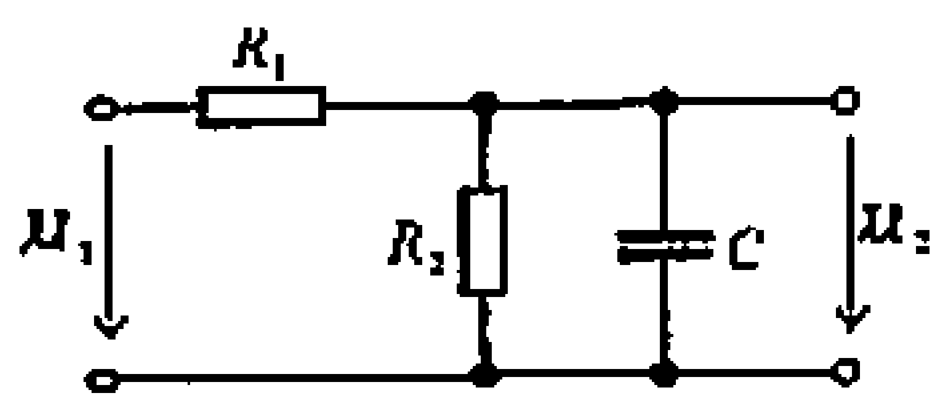


Obr. 1

Příklad 1.2 **Celkem 11 bodů**

Obvod podle obr. 2 se v čase t = 0 připojí na zdroj harmonického napětí $u_1(t) = 10 \sin(2\pi\, 10000\, t)$ [V]. Vypočítejte časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ pro t > 0, byl-li kapacitor pro t < 0 bez náboje. Parametry obvodu jsou $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, C = 31831 pF. Zdroj napětí $u_1(t)$ má nulový vnitřní odpor.

Pro zobrazení přechodového děje je použit číslicový osciloskop s nastaveným režimem spouštění "pretrig.". Nakreslete jeho blokové schema a heslovitě vysvětlete tento režim činnosti.



Obr. 2

20.11.1993

1. Státní zkouška

Matematika

Varianta 4

Příklad 1. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' = 2e^{-x},$$

které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

(5 bodů)

Příklad 2. Vypočtěte integrál

$$\int_C \frac{e^{2z}\,dz}{z^3 - 1}$$

po křivce $C : x^2 + y^2 - 2x = 0$ kladně orientované.

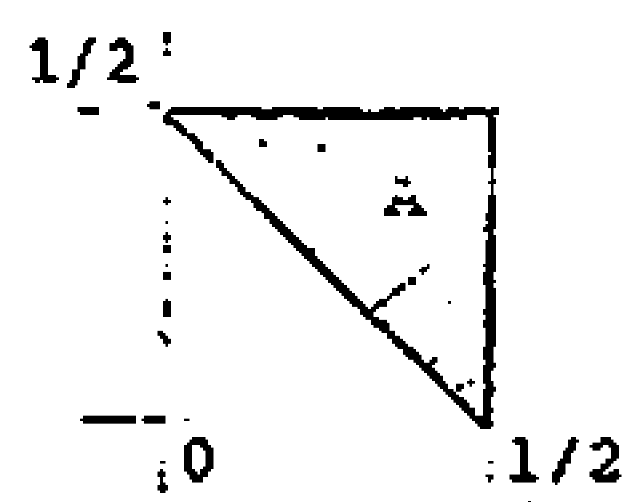
(5 bodů)

Příklad 3. Náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = \begin{cases} k\,xy & \text{pro } (x, y) \in \{(x, y);\ x > 0,\ y > 0,\ y < 1 - x\}, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Stanovte: a) konstantu k ;

b) pravděpodobnost $P((X, Y) \in A)$, že bod (X, Y) padne do množiny A, kde



c) střední hodnotu $E(XY)$.

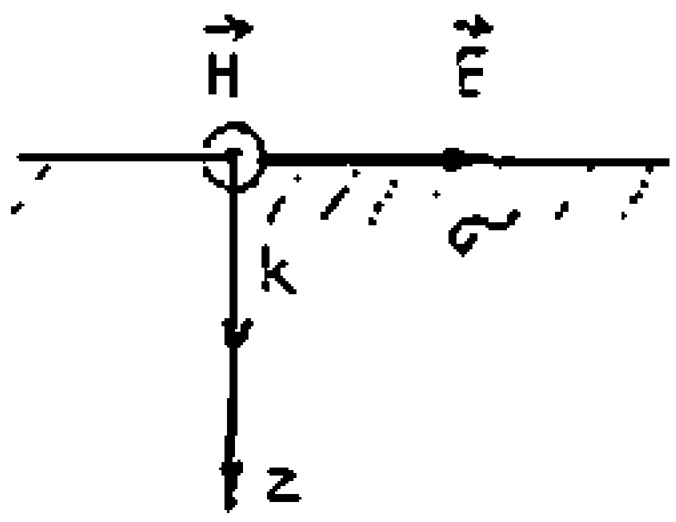
(10 bodů)

Rovinná, harmonická, elektromagnetická vlna proniká do vodivého prostředí s parametry: relativní permitivita $\varepsilon_r = 1$

relativní permeabilita $\mu_r = 1$

měrná vodivost $\sigma = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ S/m

a šíří se v něm v kladném směru osy z. Na povrchu vodivého prostředí je amplituda tečné složky intenzity elektrického pole $E_M = 1$ V/m (viz obr.). Kmitočet vlny je $f = 10^3$ Hz.



$$\varepsilon_0 \doteq \frac{10^{-9}}{36\,\pi} \quad \text{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\,\pi\, 10^{-7} \quad \text{H/m}$$

Vypočítejte:

a) hloubku vniku

b) amplitudu intenzity magnetického pole v hloubce vniku

c) fázový posuv mezi $\hat{\vec{E}}$ a $\hat{\vec{H}}$ v hloubce vniku.

Všechny vypočítané veličiny uvádějte v základních jednotkách soustavy SI.

6 bodů

3

Ze kterých rovnic vyplývají podmínky na rozhraní dvou prostředí pro složky elektrického pole $\vec{E}$ a $\vec{D}$. Tyto podmínky určete:

a) na rozhraní dvou dokonalých dielektrik $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

b) na rozhraní dvou ztrátových dielektrik $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$

3 body

20.11.1993

Dvěma velmi dlouhými, přímými, rovnoběžnými vodiči, vzdálenými 2m (viz obr.) protéká proud I = 2 A. Vodiče jsou umístěny ve vzduchu (μ_r = 1).

1. Jaká síla působí na délkový metr vodiče č. 1? Sílu vypočítejte numericky a graficky znázorněte její směr.

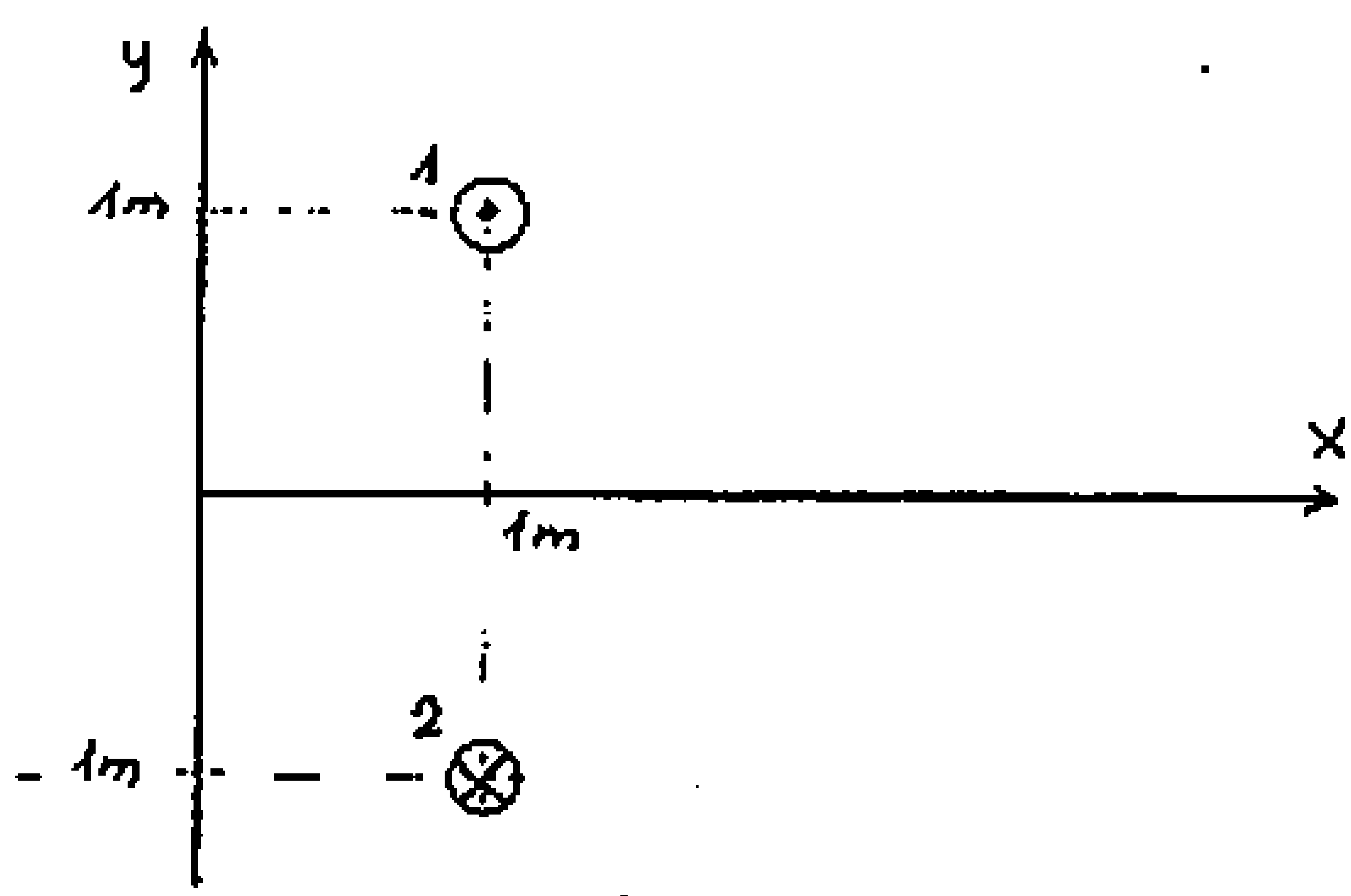
2. Vodič č. 2 odstraníme.

a) do roviny y = 0 vložíme ideálně magneticky vodivý list. Jaká síla působí nyní na vodič č. 1?
Sílu vypočítejte numericky a graficky znázorněte její směr.

b) do roviny x = 0 přidáme další ideálně magneticky vodivý list. Jaká síla působí nyní na vodič č. 1?
Sílu vypočítejte numericky a graficky znázorněte její směr.

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \quad H/m$$

Všechny vypočítané veličiny uvádějte v základních jednotkách soustavy SI.



6 bodů

Měření

20.11.1993

Varianta C

1C.
Nakreslete zapojení převodníku $I \rightarrow U$ s převodem 2mA->2V s použitím operačního zesilovače. Vypočtěte hodnotu zpětnovazebního odporu a určete, jak přesný odpor je třeba, aby chyba měření proudu nepřekročila 1% pro proud 2 mA. Máte k dispozici číslicový voltmetr s rozsahem 3V a udávanou chybou 0.2% z měř.h.+0.1% z rozs. Vstupní klidový proud OZ je menší než 1 uA.

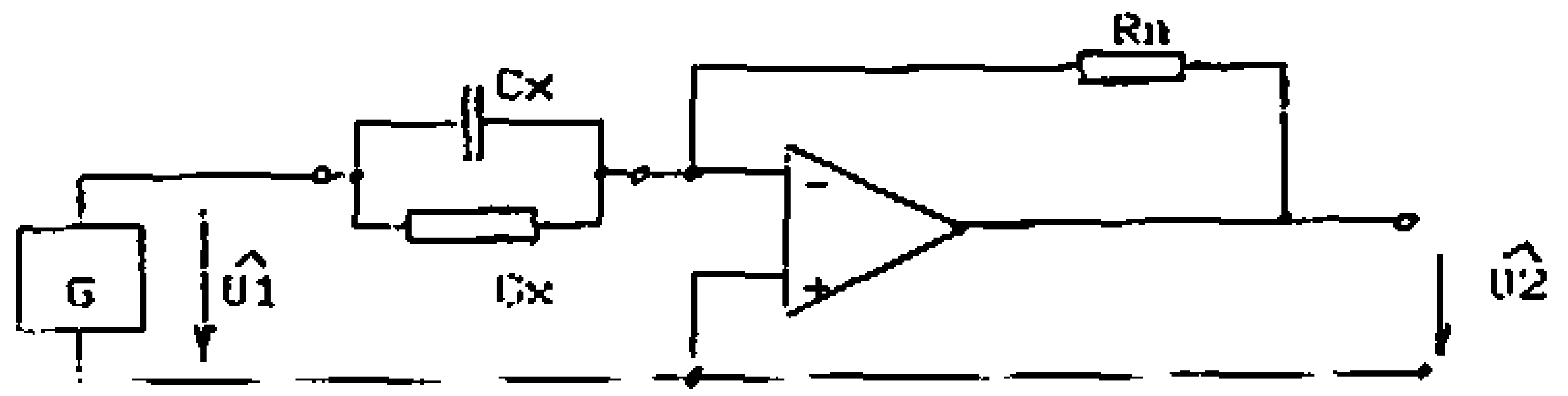
4body

2C.
Nakreslete princip zapojení D/A převodníku s odporovou sítí R - 2R. Jaké jsou výhody tohoto uspořádání odporové sítě?

4body

3C.
Měříte parametry kondenzátoru Cx v zapojení dle obrázku. Hodnoty prvků a naměřené hodnoty: R_n = 10 kohm, $\hat{U}_1$ = 10 V, $Re\hat{U}_2$ = 0.2 V, $Im\hat{U}_2$ = 6.3 V, f = 10 kHz. Určete Cx a $tg\delta$, potřebné vztahy odvoďte.

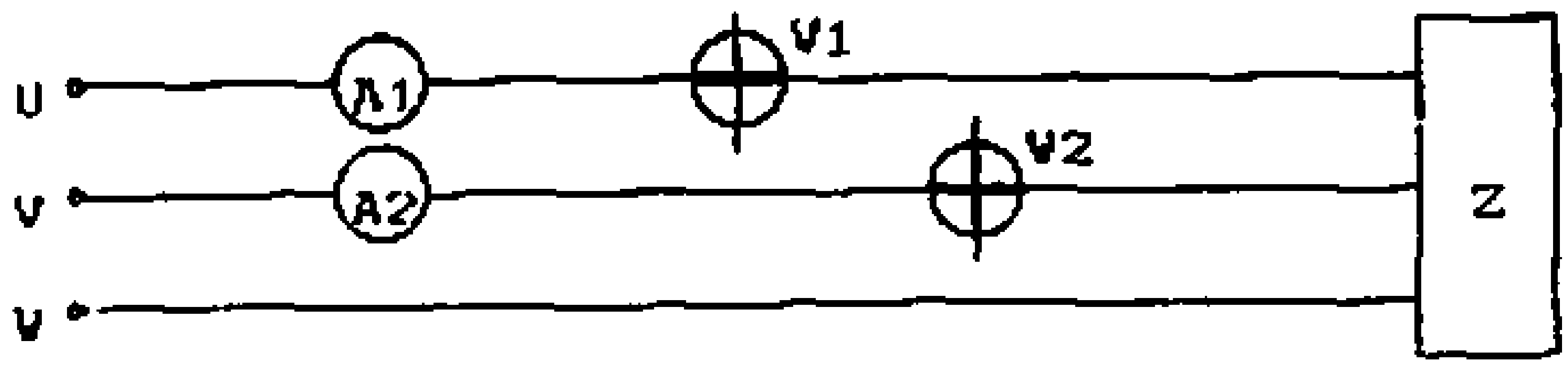
4body



4C.
Dokreslete předložené zapojení tak, aby vzniklo zapojení pro měření činného výkonu nesouměrné trojfázové zátěže. Soustava napětí zdroje je souměrná. Určete příkon zátěže a chybu měření (chybu metody zanedbejte), je-li dáno:

napěťový rozsah wattmetrů	400	V
proudový rozsah wattmetrů	10	A
třída přesnosti wattmetrů	1	
délka stupnice wattmetrů	100	dílků
výchylka wattmetru W1..........	60	dílků
výchylka wattmetru W2..........	80	dílků

3 body

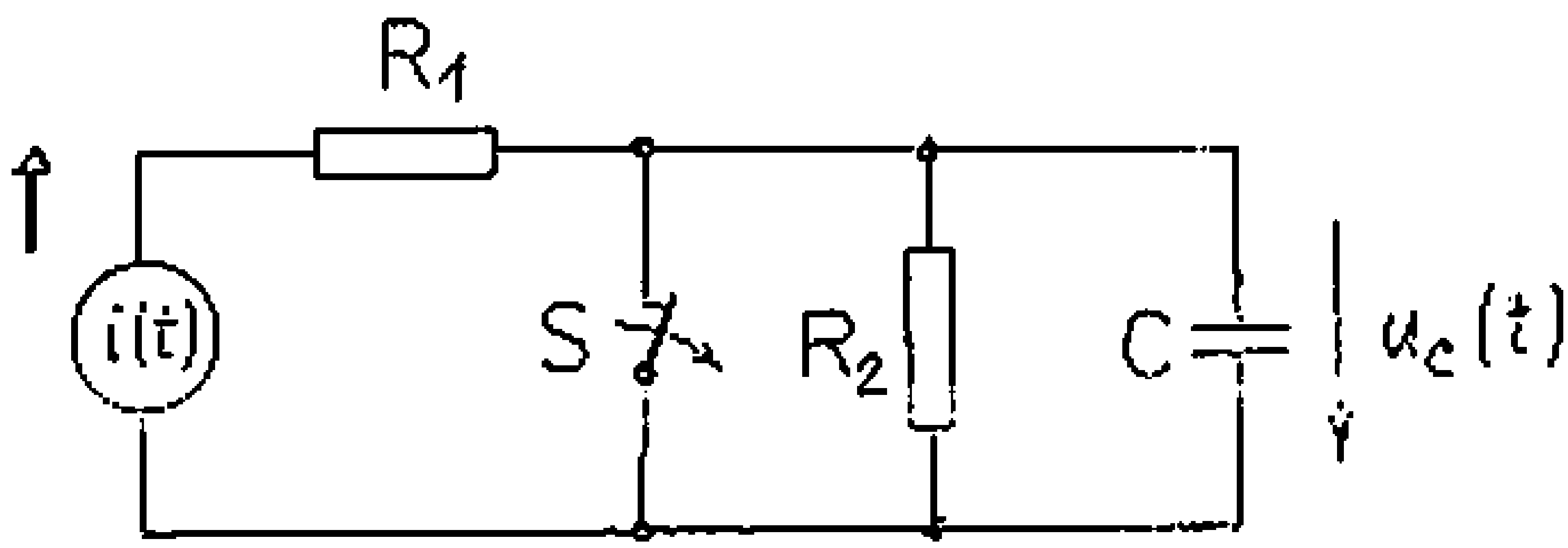


PSZ TO 3.7 (Celkem 10 bodů)

Obvod podle obrázku obsahující zdroj harmonického proudu $i(t)$ je pro $t < 0$ v ustáleném stavu. V čase $t = 0$ se rozepne spínač S, který zkratoval kapacitor C.

1. Najděte diferenciální rovnici pro výpočet časového průběhu napětí na kapacitoru $u_C(t)$ při přechodném jevu pro $t > 0$ a uveďte její obecné řešení.
2. Určete partikulární řešení $u_{Cp}(t)$.
3. Vypočítejte časový průběh napětí $u_C(t)$ pro $t > 0$.
4. Vypočtený průběh znázorněte graficky.

Parametry obvodu jsou: $R_1 = R_2 = 500\ \Omega$, $C = 1\mu F$, $i(t) = 0.1 \sin(2000\, t)$ [A].



20.11.1993

M1

Výpočetní technika a programování I, II

Příklady k první státní zkoušce

1. a) V čem se liší vyšší programovací jazyky od strojově orientovaných jazyků
   b) Jaké vlastnosti má algoritmus
   c) Vysvětlete rozdíl mezi pamětí RAM a ROM
   d) Stručně charakterizujte funkci operačního systému
   e) Jak v pascalském programu vyjádříte, že hodnotou proměnné X může být pouze znak číslice

2. V následujícím programu (zapsaném ve standardním jazyku Pascal) jsou dvě chyby. Opravte je a určete, co program vypíše. Vstupní soubor je zadáván z klávesnice.

```
program Test(output);
var
  I,X:integer;
  S:file of integer;
begin
  for I:=1 to 10 do write(S,I);
  reset(S);
  for J:=1 to 5 do read(S,X);
  write(X);
end.
```

3. Napište program, který přečte n celých čísel, n<=100, a vypíše je seřazená vzestupně. Zvolte vhodnou datovou reprezentaci.

---

1. a) Definujte moment síly vzhledem k bodu
   b) Kolo setrvačníku o momentu setrvačnosti $J = 80$ kg m^2 je roztáčeno ze stavu klidu otáčivým momentem, který roste s časem lineárně tak, že v čase $t_0 = 0$ je otáčivý moment roven nule a v čase $t_1 = 100$ s dosáhne hodnoty $M_1 = 500$ Nm. Jaká je frekvence otáčení kola setrvačníku v čase t_1?

8bodů

2. a) Určete vztah mezi jednotkami pro energii: elektronvoltem a joulem

7bodů

   b) Jakou vlnovou délku má foton, jehož hmotnost se rovná klidové hmotnosti elektronu m_e? ($m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $c = 3.10^8$ m/s, $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C)

Matematika

Tato kapitola obsahuje řešené příklady z okruhů

Diferenciální rovnice
Soustavy diferenciálních rovnic
Diferenciální rovnice s impulzovou pravou stranou
Extrémy funkcí více proměnných
Extrémy funkce více proměnných definované implicitně
Fourierovy řady
Komplexní rovnice
Holomorfní funkce

PD

21.9.95

$$x \cdot y' - y = 4x^3 \;/\tfrac{1}{x} \qquad y(1) = 2$$

$$y' - \frac{1}{x} y = 4x^2$$

I. homogenní řešení

$$y' - \frac{1}{x} y = 0$$

$$y' = \frac{1}{x} y \;/y$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\underline{\tilde{y} = x \cdot c}$$

II. partikulární řešení ⇒ variace konstanty

$$\tilde{y} = x \cdot c(x)$$

$$\tilde{y}' = c(x) + x \cdot c'(x)$$ dosadíme do rce

$$* \quad \cancel{c(x)} + x \cdot c'(x) - \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{c(x)} = 4x^2$$

$$c'(x) = 4x \Rightarrow c(x) = \int 4x\,dx = \underline{2x^2}$$

$$\underline{\hat{y} = 2x^3}$$

$$\underline{y = \hat{y} + \tilde{y} = 2x^3 + Cx}$$ obecné řešení

cauchy úloha:

$$2 = 2 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \underline{y = 2x^3}$$

PF

20.4.96.

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 3t^2 - 8t$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

I. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$\underline{x_h(t, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{t} + c_2 e^{3t}}$

II

$w(t) = at^2 + bt + c$

$\dot{w}(t) = 2at + b$

$\ddot{w}(t) = 2a$

$2a - 4(2at + b) + 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 - 8t$

$t^2: \quad 3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$t^1: \quad -8a + 3b = -8 \Rightarrow b = 0$

$t^0: \quad 2a - 4b + 3c = 0 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$

$\underline{w(t) = t^2 - \frac{2}{3}}$

$\underline{x(t, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{t} + c_2 e^{3t} + t^2 - \frac{2}{3}}$ $\quad \dot{x}(t, c_1, c_2) = c_1 e^{t} + 3c_2 e^{3t} + 2t$

cauchy:

$0 = c_1 + c_2 - \frac{2}{3}$ $\quad 0 = c_1 + 3c_2 + 0$

$0 = 2c_2 + \frac{2}{3} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}, \; c_1 = 1$

$\underline{x(t, 0, 0, 0) = e^{t} - \frac{1}{3} e^{3t} + t^2 - \frac{2}{3}}$

(př.)

9.7.96

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4t + 2e^{t} \qquad x(0)=4, \quad \dot{x}(0)=6$$

I homog. řeš. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{\cancel{16-16}}^{\,0}}{2} = 2$

$= 2$ $\Rightarrow$ není řeš.

$$u(t, c_1, c_2) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

II part. řeš.

$$w(t) = (at+b) + c \cdot e^{t}$$
$$\dot{w}(t) = a + c \cdot e^{t}$$
$$\ddot{w}(t) = c \cdot e^{t}$$

$$c \cdot e^{t} - 4(a + c \cdot e^{t}) + 4(at+b) + 4c \cdot e^{t} = 4t + 2e^{t}$$

$$c \cancel{-4c} \cancel{+4c} = 2 \Rightarrow c = 2$$
$$-4a + 4b = 0$$
$$4a = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$$
$$w(t) = t + 1 + 2e^{t}$$

$$v(t, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot t \cdot e^{2t} + 2e^{t} + 1 + t$$
$$\dot{v}(t, c_1, c_2) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + c_2 2t \cdot e^{2t} + 2e^{t} + 1$$

$$4 = c_1 + 2 + 1 \Rightarrow c_1 = 1$$
$$6 = 2c_1 + c_2 + 1 + 2$$
$$6 = c_2 + 5 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$v(t, 0, 4, 6) = e^{2t} + t e^{2t} + 2e^{t} + 1 + t$$

př.

19.4.96

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 12e^{3t} + 2t^2 \qquad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 6$$

I. homog. řešení

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$u(t, c_1, c_2) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$$

II part. řešení

$$w(t) = a e^{3t} + (bt^2 + ct + d)$$

$$\dot{w}(t) = 3a e^{3t} + 2bt + c$$

$$\ddot{w}(t) = 9a e^{3t} + 2b$$

$$\cancel{9ae^{3t}} + 2b - \cancel{9ae^{3t}} - 6bt - 3c + 2ae^{3t} + 2bt^2 + 2ct + 2d = 12e^{3t} + 2t^2$$

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$2b - 3c + 2d = 0 \quad d = \frac{7}{2}$$

$$-6b + 2c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$w(t) = 6e^{3t} + t^2 + 3t + \frac{7}{2}$$

$$v(t, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{t} + c_2 e^{2t} + 6e^{3t} + t^2 + 3t + \frac{7}{2}$$

$$\dot{v}(t, c_1, c_2) = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} + 18e^{3t} + 2t + 3$$

$$2 = c_1 + c_2 + 6 + \frac{7}{2}$$

$$6 = c_1 + 2c_2 + 18 + 3$$

$$4 = c_2 + \frac{23}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{15}{2}$$

$$2 = c_1 - \frac{15}{2} + 6 + \frac{7}{2} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$v(t, 0, 2, 6) = -\frac{15}{2} e^{2t} + 6e^{3t} + t^2 + 3t + \frac{7}{2}$$

Př. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4t + 2e^t$ $\quad x(0) = 4$, $\dot{x}(0) = 6$

8.7.97

jako 9.7.96

Př. ~~Soustavy~~

$+j$ není řešen. !

Př. $2\ddot{x} + 5\dot{x} = 29\cos t + 3t$ $\quad (e^0 \cos t) \Rightarrow 0 + j$

22.11.97

I. homogení řešení

$$2\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

$$\lambda(2\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 0}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 5}{4}$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$u(t, c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{0t} + c_2 \cdot e^{-\frac{5}{2}t}$$

$$u(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 \cdot e^{-\frac{5}{2}t}$$

$$v(t) = a \cdot \cos t + b \sin t + ct + d$$

$$\dot{v}(t) = -a \sin t + b \cos t + c$$

$$\ddot{v}(t) = -a \cos t - b \sin t$$

$$-2a \cos t - 2b \sin t - 5a \sin t + 5b \cos t + 5c = \cancel{29\cos t} = 29\cos t + 3t$$

$\cos t$: $-2a + 5b = 29$ $\qquad 5c = 0 \Rightarrow c = 0$

$\sin t$: $-2b - 5a = 0 \Rightarrow 2b = -5a$

$$b = -\frac{5}{2}a \qquad \underline{b = 5}$$

$$-2a + 5\left(-\frac{5}{2}a\right) = 29$$

$$-2a - \frac{25}{2}a = 29 \qquad -\frac{29}{2}a = 29$$

$$-a = 2 \Rightarrow \underline{a = -2}$$

$$v(t) = -2\cos t + 5\sin t$$

(př)

17.9.98

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 3e^{2t} + t \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 4 \end{cases}$$

I homog. řešení jako 19.4.96

$$u(t,c_1,c_2) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{2 jď. řešení}$$

II partikulární řešení

$$w(t) = t \cdot a e^{2t} + bt + c$$

$$\dot{w}(t) = a \cdot e^{2t} + 2ate^{2t} + b$$

$$\ddot{w}(t) = 2ae^{2t} + 2ae^{2t} + 4ate^{2t} = 4ae^{2t} + 4ate^{2t}$$

$$4ae^{2t} + 4ate^{2t} - 3ae^{2t} - 6ate^{2t} - 3b + 2tae^{2t} + 2bt + 2c = 3e^{2t} + t$$

$$4a - 3a = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$4a - 6a + 2a = 0 \qquad 0 = 0$$

$$-3b + 2c = 0 \Rightarrow 2c = \frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$w(t) = 3te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

$$v(t,c_1,c_2) = c_1 \cdot e^{t} + c_2 e^{2t} + 3te^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

$$\dot{v}(t,c_1,c_2) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + 3e^{2t} + 6te^{2t} + \frac{1}{2}$$

$$1 = c_1 + c_2 + \cancel{3} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \frac{3}{4}$$

$$4 = c_1 + c_2 + 3 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4} - c_1$$

$$\frac{1}{2} = c_1 + c_2$$

$$\frac{1}{2} = c_1 + \frac{1}{4} - c_1$$

(př.)

27.11.99

$$x y' + y = 2x \ln x + x \quad \Big/ \frac{1}{x} \qquad y(1) = 2$$

$$(1.) \quad y' + \frac{1}{x} y = 2 \ln x + 1$$

I. homogenní řešení

$$y' + \frac{1}{x} y = 0$$

$$y' = -\frac{1}{x} y \quad \Big/ \frac{1}{y}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|$$

$$\tilde{y} = \frac{c}{x}$$

$$\int 1 \cdot \ln x = \left| \begin{matrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = $$

$$= x \ln x - \int 1 = x \ln x - x$$

II partikulární řešení ⇒ variace konstanty

$$\left.\begin{matrix} \hat{y} = \dfrac{c(x)}{x} \\ \hat{y}' = \dfrac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} \end{matrix}\right\} \text{dosazení do 1.}$$

$$\frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{c(x)}{x} = 2 \ln x + 1$$

$$\frac{c'(x) \cdot}{x} - \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} = 2 \ln x + 1$$

$$c'(x) = 2x \ln x + x \Rightarrow c(x) = \int 2x \ln x + x =$$

$$= \left| \cancel{\begin{matrix} u' = \ln x & u = x \ln x - x \\ v = 2x & v' = 2 \end{matrix}} \right| =$$

$$= \cancel{2x (x \ln x - x)}$$

$$c(x) = \int (2x \ln x + x) = \left| \begin{matrix} u' = 2x & u = x^2 \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} + x^2 \ln x - \int x\,dx =$$

$$= x^2 + x^2 \ln x \Rightarrow \hat{y} = x + x \ln x$$

$$\boxed{y = \tilde{y} + \hat{y} = \frac{c}{x} + x + x \ln x}$$

Cauchy úloha

$$2 = c + 1 + 0 \Rightarrow c = 1$$

$$y = \frac{1}{x} + x + x \ln x$$

Soustavy

PŘ

18.9.97

$$\dot{x} = 3x - y$$
$$\dot{y} = -x + 3y$$

$x(0) = 3$
$y(0) = 1$

$$x = 3y - \dot{y}$$
$$\dot{x} = 3\dot{y} - \ddot{y}$$

$$3\dot{y} - \ddot{y} = 9y - 3\dot{y} - y$$
$$-\ddot{y} + 6\dot{y} - 8y = 0$$

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 8y = 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\tilde{y} = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t}$$
$$\dot{\tilde{y}} = 4c_1 e^{4t} + 2c_2 e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad x = 3c_1 e^{4t} + 3c_2 e^{2t} - 4c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{2t}$$

$$x = c_2 e^{2t} - c_1 e^{4t}$$
$$y = c_2 e^{2t} + c_1 e^{4t}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3 &= c_2 - c_1 \\ 1 &= c_2 + c_1 \end{aligned}$$

$$2c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = 2$$
$$c_1 = -1$$

Cauchy

$$x = e^{4t} + 2e^{2t}$$
$$y = -e^{4t} + 2e^{2t}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

řešení metodou charakt. kořenů

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

homogenní soustava

$$(A-\lambda E)\cdot \varkappa = 0$$

$$\lambda_1 = 4: \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (3-4)\varkappa_1 - 1\cdot\varkappa_2 &= 0 \\ -1\,\varkappa_1 + (3-4)\varkappa_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} -1\,\varkappa_1 - 1\,\varkappa_2 &= 0 \\ -1\,\varkappa_1 - 1\,\varkappa_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$-\varkappa_1 = \varkappa_2 \Rightarrow \varkappa_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = -1 : 1$$

$$\lambda = 2: \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1 - \varkappa_2 &= 0 \\ -\varkappa_1 + \varkappa_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \varkappa_1 = 1,\ \varkappa_2 = 1 \qquad \varkappa_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{aligned} x &= -c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} \\ y &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 3 &= -c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$c_2 = 2 \quad c_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

(*)

$$\dot{x} = x - 2y \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\dot{y} = x + 3y$$

$$(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\underline{\lambda_{1,2} = 2 \pm j}$$

$\underline{\lambda_1 = 2 + j}$ $\qquad (A - \lambda E)\cdot h = 0$

$$1-(2+j)\,h_1 - 2h_2 = 0$$
$$h_1 + 3-(2+j)\,h_2 = 0$$

$$(-1-j)\,h_1 - 2h_2 = 0$$

volíme $h_1 = 2$ a $h_2 = -1 - j$ $\Rightarrow h = \begin{bmatrix} 2 \\ -1-j \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 2 - j}$

$$1-(2-j)\,h_1 - 2h_2 = 0$$
$$h_1 + 3-(2-j)\,h_2 = 0$$

$$(-1+j)\,h_1 - 2h_2 = 0$$

volíme $h_1 = 2$, $h_2 = -1 + j$ $\Rightarrow h = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+j \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1-j \end{bmatrix} e^{(2+j)t} = e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ -1-j \end{bmatrix}(\cos t + j\sin t) =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} 2\cos t \\ -\cos t + \sin t \end{bmatrix} + e^{2t} j \begin{bmatrix} 2\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

Řešení

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 2\cos t \\ -\cos t + \sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 2\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

(př)

$$\dot{x} - 5x - 3y = 0 \qquad \dot{x} = 5x + 3y$$
$$\dot{y} + 3x + y = 0 \qquad \dot{y} = -3x - y$$

$$(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = (5-\lambda)\cdot(-1-\lambda) + 9 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = 2}$$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad (A - \lambda E)\cdot \gamma = 0$

$$3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0 \qquad \text{volím } \gamma_1 = 1 \qquad \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$-3\gamma_1 - 3\gamma_2 = 0 \qquad \gamma_2 = -1$$

$$3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 1 \qquad \text{volím } \gamma_1 = 0 \qquad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$-3\gamma_1 - 3\gamma_2 = -1 \qquad \gamma_2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

jinak:

$$\dot{x} - 5x - 3y = 0$$
$$\dot{y} + 3x + y = 0 \Rightarrow 3x = -\dot{y} - y$$
$$x = -\frac{1}{3}\dot{y} - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}(\dot{y} + y)$$
$$\dot{x} = -\frac{1}{3}\ddot{y} - \frac{1}{3}\dot{y} = -\frac{1}{3}(\ddot{y} + \dot{y})$$

$$-\frac{1}{3}\ddot{y} - \frac{1}{3}\dot{y} + \frac{5}{3}\dot{y} + \frac{5}{3}y - 3y = 0$$

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2$$
$$\underline{y = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 t \cdot e^{2t}}$$

$$\dot{y} = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t}$$
$$\dot{y} = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}(1 + 2t)$$

$$x = -\frac{1}{3}\left(2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}(1+2t) + c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}\right)$$
$$x = -\frac{1}{3}\left(3c_2 t e^{2t} + 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}\right)$$
$$x = -c_2 t e^{2t} + c_1 e^{2t} - \frac{1}{3}c_2 e^{2t}$$
$$\underline{x = -c_1 e^{2t} + c_2\left(-t - \frac{1}{3}\right)e^{2t}}$$

$$\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t}}$$

pr.

$$\dot{x} = -x + 2y$$
$$\dot{y} = -3x + 4y + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \quad k = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{vmatrix}$$

$x(0) = 1$
$y(0) = 0$

$$y = \frac{1}{2}(\dot{x} + x)$$
$$\dot{y} = \frac{1}{2}(\ddot{x} + \dot{x})$$

$$\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} = -3x + 2\dot{x} + 2x \quad /2$$
$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} < \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$
$$\dot{x} = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(2c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_1 e^{2t} + c_2 \cancel{e^t}\right)$$
$$y = \frac{3}{2} c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$
$$y = \frac{3}{2} c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

$$\dot{x} = 2c_1'(t)\, e^{2t} + c_2'(t) e^{t} = 0 \quad /-1]+$$
$$\dot{y} = 3c_1'(t)\, e^{2t} + c_2'(t)\, e^{t} = \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$$

$$c_1'(t) \cdot e^{2t} = \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \Rightarrow c_1'(t) = \frac{e^{t}}{e^{2t}+1}$$

$$c_1(t) = \int \frac{e^{t}}{e^{2t}+1}\, d = \int \frac{e^{t}}{(e^{t})^2+1}\, dt = \underline{\operatorname{arctg}(e^{t})}$$

$$c_2'(t) \cdot e^{t} = -2\, c_1'(t)\, e^{2t}$$
$$c_2'(t) = -2\, c_1'(t) \cdot e^{t} = \frac{-2\, e^{2t}}{e^{2t}+1}$$
$$c_2(t) = -\int \frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}\, dt = \underline{-\ln(e^{2t}+1)}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{2t}\left(c_1 + \operatorname{arctg}(e^t)\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + e^t\left(c_2 - \ln(e^{2t}+1)\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x(0) = 1 \qquad 1 = \left(c_1 + \frac{\pi}{4}\right)\cdot 2 + (c_2 - \ln 2)\cdot 1$

$y(0) = 0 \qquad 0 = \left(c_1 + \frac{\pi}{4}\right)\cdot 3 + (c_2 - \ln 2)\cdot 1$

---

př

17.4.99

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x + 2e^t$$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^t \end{bmatrix}$

$x(0) = 0$
$y(0) = 1$

$$y = \dot{x}$$
$$\dot{y} = \ddot{x}$$

$\ddot{x} = x \rightarrow \ddot{x} - x = 0 \qquad \lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)\cdot(\lambda + 1) = 0$

$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$
$\dot{x} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t \qquad y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$

je to správně takto?

$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$
$y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$

$\dot{x} = -c_1'(t)\cdot e^{-t} + c_2'(t)\, e^t = 0$
$\dot{y} = c_1'(t)\cdot e^{-t} + c_2'(t)\cdot e^t = 2e^t \quad]^+$

$2c_2'(t)\, e^t = 2e^t$
$c_2'(t) = 1 \qquad c_2(t) = \int 1\, dt = t$

$c_1'(t)\cdot e^{-t} = c_2'(t)\cdot e^t$

$c_1'(t) = \frac{1\cdot e^t}{e^{-t}} = e^t\cdot e^t = e^{2t} \qquad c_1(t) = \int e^{2t}\, dt = \frac{e^{2t}}{2}$

~~$x = \frac{e^{2t}}{2}\cdot e^{-t} + te^t +$~~

~~$y = -\frac{e^{2t}}{2} e^{-t} + te^t$~~

cauchy

Cauchy

$x = \frac{e^{2t}}{2} e^{-t} + t\cdot e^t + c_1\cdot e^{-t} + c_2 e^t$
$y = -\frac{e^{2t}}{2} e^{-t} + t\cdot e^t - c_1 e^{-t} + c_2 e^t$

$\left.\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2} + c_1 + c_2 \\ 1 &= -\tfrac{1}{2} - c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_2 &= \tfrac{1}{2} \\ c_1 &= -1 \end{aligned}$

Pr.

8.7.99.

$$\dot{x} = x + 2y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{2}(\dot{x} - x)$$
$$\dot{y} = 4x + 3y + 2e^{-t} \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}(\ddot{x} - \dot{x})$$

$x(0) = -2$
$y(0) = 2$

$$\frac{1}{2}\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x} = 4x + \frac{3}{2}\dot{x} - \frac{3}{2}x \quad / 2.$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$$
$$\dot{x} = -c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{5t}$$

[illegible]

$$y = \frac{1}{2}\left(-c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{5t} - c_1 e^{-t} - c_2 e^{5t}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-2c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{5t}\right)$$
$$y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t}$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$$
$$y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t}$$

$$\dot{x} = -c_1'(t)\, e^{-t} + 5c_2'(t)\, e^{5t} = 0$$
$$\dot{y} = c_1'(t)\, e^{-t} + 10c_2'(t)\, e^{5t} = 2e^{-t}$$

$$15c_2'(t)\, e^{5t} = 2e^{-t}$$

$$c_2'(t) = \frac{2}{15e^{6t}} \qquad c_2(t) = \frac{2}{15}\int e^{-6t} = \frac{2}{15} \cdot \frac{e^{-6t}}{-6}$$

$$c_1'(t) \cdot e^{-t} = 5c_2'(t) \cdot e^{5t} \qquad c_2 = -\frac{1}{45} e^{-6t}$$

$$c_1'(t) = \frac{5\cancel{e^{5t}} \cdot \frac{2}{15} \cdot \cancel{e^{-6t}}}{\cancel{e^{-t}}} = \frac{2}{3}$$

$$c_1(t) = \int \frac{2}{3}\, dt = \frac{2}{3}t + F$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} + \frac{2}{3} t e^{-t} - \frac{1}{45} e^{-6t} \cdot e^{5t}$$

$$y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t} - \frac{2}{3} t e^{-t} - \frac{2}{45} e^{-6t} \cdot e^{5t}$$

$$\begin{aligned} -2 &= c_1 + c_2 - \frac{1}{45} \\ 2 &= -c_1 + 2c_2 - \frac{2}{45} \end{aligned} \quad \Bigg| \; +$$

$$0 = 3c_2 - \frac{1}{45} \qquad c_1 = -\frac{268}{135}$$

$$3c_2 = \frac{1}{45} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{135}$$

8.7.99

$$\dot{x} = x + 2y$$
$$\dot{y} = 4x + 3y + 2e^{-t}$$

$x(0) = -2$
$y(0) = 2$

$$\dot{x} = x + 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}\dot{x} - \frac{1}{2}x \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}$$
$$\dot{y} = 4x + 3y$$

$$\frac{1}{2}\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x} = 4x + \frac{3}{2}\dot{x} - \frac{3}{2}x \quad /\cdot 2$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \quad 2+6 = 8 \quad 2-6 = -4$$

$$x = c_1 \cdot e^{8t} + c_2 \cdot e^{-4t} \Rightarrow y = 4c_1 e^{8t} - 2c_2 e^{-4t} - \frac{1}{2}c_1 e^{8t} + \frac{1}{2}c_2 e^{-4t}$$
$$\dot{x} = 8c_1 e^{8t} - 4c_2 \cdot e^{-4t} \qquad y = \frac{7}{2}c_1 e^{8t} - \frac{5}{2}c_2 e^{-4t}$$

$$x = c_1 \cdot e^{8t} + c_2 \cdot e^{-4t}$$
$$y = \frac{7}{2}c_1 e^{8t} - \frac{5}{2}c_2 \cdot e^{-4t}$$

$20 + 10$

$$\dot{x} = 8c_1'(t) \cdot e^{8t} + (-4)\, c_2'(t)\, e^{-4t} = 0 \quad /\cdot 2{,}5$$
$$\dot{y} = 28c_1'(t) \cdot e^{8t} + 10\, c_2'(t) \cdot e^{-4t} = 2e^{-t}$$

$$48c_1'(t) \cdot e^{8t} = 2 \cdot e^{-t} \Rightarrow c_1'(t) = \frac{1}{24} e^{-t} \cdot e^{-8t} = \frac{1}{24} \cdot e^{-9t}$$

$$c_1(t) = \frac{1}{24}\int e^{-9t} = -\frac{1}{216} \cdot e^{-9t}$$

$$-4c_2'(t) \cdot e^{-4t} = 8 \cdot c_1'(t)\, e^{8t}$$

$$c_2'(t) = -2 \cdot e^{12t} \cdot \frac{1}{24} \cdot e^{-9t} = -\frac{1}{12} \cdot e^{3t} \Rightarrow c_2(t) = -\frac{1}{12}\int e^{3t} = -\frac{1}{36} \cdot e^{3t}$$

$$x = -\frac{1}{216} \cdot e^{-9t} \cdot e^{8t} + \left(-\frac{1}{36}\right) \cdot e^{3t} \cdot e^{-4t} + c_1 \cdot e^{8t} + c_2 \cdot e^{-4t}$$
$$y = \frac{7}{2} \cdot -\frac{1}{216} \cdot e^{-9t} \cdot e^{8t} - \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{36}\right) \cdot e^{3t} \cdot e^{-4t} + \frac{7}{2} c_1 e^{8t} - \frac{5}{2} c_2 \cdot e^{-4t}$$

zbývá dosadit a vypočíst c_1, c_2 pro Cauchy úlohu

Vzorce pro Laplaceovu transformaci

$$f(t) \mathrel{\hat=} \mathcal{L}\{f\}p = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \int_0^{\infty} 1\cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^b = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\}(p) = \int_0^{\infty} e^{3t} e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} e^{3t-pt}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{t(3-p)}\,dt =$$

$p>3$ je zap

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{t(3-p)}}{3-p}\right]_0^b = 0 - \frac{1}{3-p} = \frac{1}{p-3}$$

$$1 \mathrel{\hat=} \frac{1}{p}, \quad e^{at} \mathrel{\hat=} \frac{1}{p-a}, \quad t^n \mathrel{\hat=} \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad e^{at} f(t) \mathrel{\hat=} F(p-a)$$

$$\sin t \mathrel{\hat=} \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \mathrel{\hat=} \frac{p}{p^2+1}, \quad a>0 \quad f(at) \mathrel{\hat=} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$t f(t) \mathrel{\hat=} -F'(p)$$

$$\mathcal{L}\{t\sin t\} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -(p^2+1)' = (p^2+1)^{-2}\cdot 2p = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

$$t^2 = t\cdot t\cdot 1 \mathrel{\hat=} \left(-\left(\frac{1}{p}\right)'\right)' = -\left(-(p^{-1})'\right)' = -(+p^{-2})'$$

$$\left|\ \sin \omega t \mathrel{\hat=} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \cos \omega t \mathrel{\hat=} \frac{p}{p^2+\omega^2}\ \right|$$

Zpětná LT

$$\frac{1}{(p-a)^n} = e^{at}\cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,1(t-b)\} = e^{-bp}\cdot \mathcal{L}\{f(t-a+b)\cdot 1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\cdot 1(t-b)\} = e^{-bp}\cdot \mathcal{L}\{f(t+b)\cdot 1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-b)\cdot 1(t-b)\} = e^{-bp} F(p)$$

Př $\dfrac{2}{(p-1)^2} + \dfrac{3}{p^3} - \dfrac{1}{p+2} = 2e^{t} + \dfrac{3}{2}t^2 - e^{-2t}$

$\qquad\qquad \dfrac{3}{(p-0)^3}$

Př $\dfrac{3}{p^4} - \dfrac{6}{(p+1)^5} = \dfrac{3t^3}{6} - 6\cdot e^{-t}\dfrac{t^4}{24}$ $\qquad \boxed{e^{at}f(t) \hat{=} F(p-a)}$

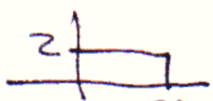
Př $\dfrac{p}{(p+1)\cdot(p^2+4)} = -\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{(p+1)} + \dfrac{1}{5}\dfrac{p+4}{p^2+4} = -\dfrac{1}{5}e^{-t} + \dfrac{1}{5}(\cos 2t + 2\sin 2t$

Př $\dfrac{10}{p(p^2+2p+10)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p+2}{p^2+2p+10} = -\dfrac{(p+1)+\frac{1}{3}\cdot 3}{(p+1)^2+3^2} + \dfrac{1}{p} =$

$= 1 - e^{-t}\left(\cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t\right)$

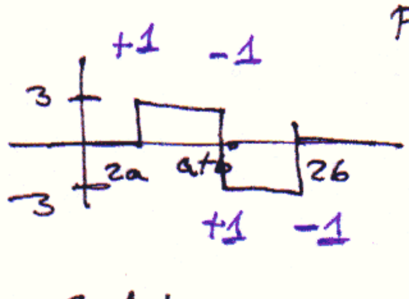
Př $\dfrac{p+3}{p^2-4p+20} = \dfrac{(p-2)+\frac{5}{4}\cdot 4}{(p-2)^2+4^2} = e^{2t}\left(\cos 4t + \dfrac{5}{4}\sin 4t\right)$

Př. $\dfrac{2p+7}{p^2+6p+13} = \dfrac{2(p+3)+\frac{1}{2}\cdot 2}{(p+3)^2+2^2} = e^{-3t}\left(2\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$

Př 

$2(1(t-0) - 1(t-\pi)) = 2\cdot 1(t) - 2\cdot 1(t-\pi) \hat{=}$

$= \dfrac{2}{p} - e^{-\pi p}\cdot\dfrac{2}{p} = \dfrac{2}{p}\left(1 - e^{-\pi p}\right)$

Př 

$3\left[1(t-2a) - 1(t-(a+b))\right]$

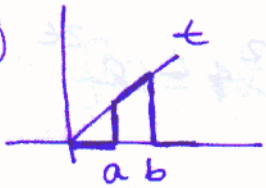
$-3\left[1(t-(a+b)) - 1(t-2b)\right] =$

$= 3\,1(t-2a) - 3\,1(t-(a+b)) - 3\,1(t-(a+b)) + 3\,1(t-2b) =$

$= 3\,1(t-2a) - 6\,1(t-(a+b)) + 3\,1(t-2b) =$

$= e^{-2ap}\cdot\dfrac{3}{p} - \dfrac{6}{p}e^{-(a+b)p} + \dfrac{3}{p}e^{-2bp} = \dfrac{3}{p}\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)$

Pf



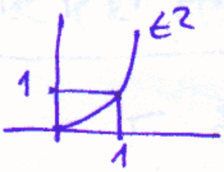
$$t\{1(t-a) - 1(t-b)\} = t\,1(t-a) - t\,1(t-b) =$$

$$e^{-ap}\cdot \mathcal{L}\{t+a\} - e^{-bp}\cdot \mathcal{L}\{t+b\} =$$

$$\boxed{t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

$$= e^{-ap}\cdot\left(\frac{1}{p^2}+\frac{a}{p}\right) - e^{-bp}\cdot\left(\frac{1}{p^2}+\frac{b}{p}\right)$$

Pf



$$t^2\left(1(t-0) - 1(t-1)\right) + 1\cdot 1(t-1) =$$

$$= t^2\,1(t) - t^2\,1(t-1) + 1\cdot 1(t-1) =$$

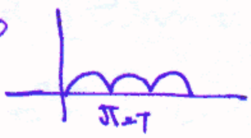
$$= \underset{1}{\underset{\parallel}{e^0}}\cdot\frac{2}{p^3} - e^{-p}\cdot\mathcal{L}\{(t+1)^2\} + e^{-p}\cdot\frac{1}{p} =$$

$$= \frac{2}{p^3} - e^{-p}\cdot\mathcal{L}\{t^2+2t+1\} + e^{-p}\cdot\frac{1}{p} =$$

$$= \frac{2}{p^3} - e^{-p}\cdot\left(\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}+\cancel{\frac{1}{p}}\right) + \cancel{e^{-p}\cdot\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{2}{p^3} - e^{-p}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}\right)$$

Pf



$$|\sin t| = \sin t\cdot\left(1(t) - 1(t-\pi)\right) =$$

$$= \sin t\cdot 1(t) - \sin t\; 1(t-\pi) =$$

$$\sin t = \frac{1}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{p^2+1} - e^{-\pi p}\cdot\mathcal{L}\{\sin(t+\pi)\} =$$

$$\cos t = \frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{p^2+1} - e^{-\pi p}\cdot\mathcal{L}\{-\sin t\} = *$$

$$= \frac{1}{p^2+1} + e^{-\pi p}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

Dif. rov. 1. řádu – pravá strana impuls

PŘ

$$X = X$$

$$\dot X = pX - X(0+)$$

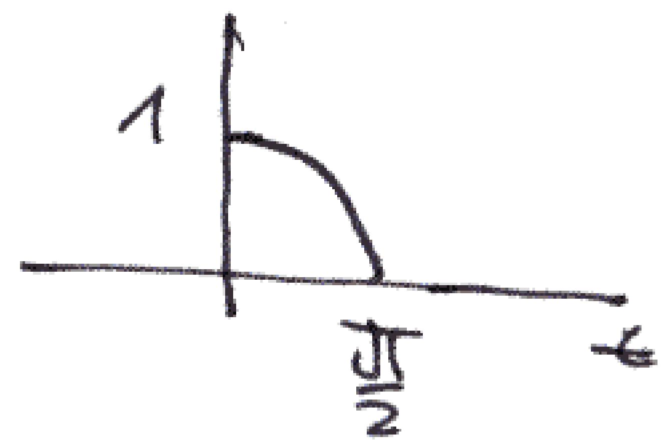
$$\ddot X = p^2 X - p\,X(0+) - \dot X(0+)$$

PŘ.

20.9.96

$$\dot x - x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} \cos t & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

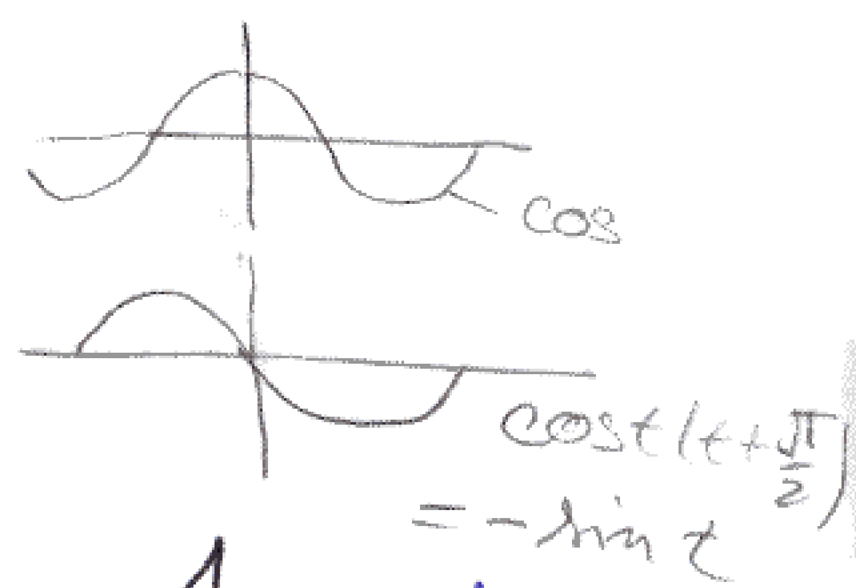
$$t \in (0,\infty) \quad x(0+) = 2$$



$$f(t) = \cos t \left(1(t) - 1(t-\tfrac{\pi}{2}) \right) =$$

$$\cos t \; 1(t) - \cos t \; 1(t-\tfrac{\pi}{2}) =$$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} - e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \mathcal{L}\left\{ \cos(t+\tfrac{\pi}{2}) \right\} =$$



$$= \frac{p}{p^2+1} - e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \mathcal{L}\{-\sin t\} =$$

$$= \frac{p}{p^2+1} + e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \frac{1}{p^2+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin t &= \frac{1}{p^2+1} \\ \cos t &= \frac{p}{p^2+1} \end{aligned}}$$

$$\dot x - x = f(t)$$

$$pX - X(0+) \cancel{- X = pX - 2X = F(p)}$$

$$pX - 2 - X = \frac{p + e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$$

$$X(p-1) = \frac{p + e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} + 2$$

III

$$X = \frac{p + e^{-\frac{\pi}{2}p}}{(p^2+1)\cdot(p-1)} + \frac{2}{(p-1)} = \frac{p}{(p^2+1)\cdot(p-1)} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{(p^2+1)\cdot(p-1)} + \frac{2}{(p-1)}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,1(t-b)\} = e^{-bp}\,\mathcal{L}\{f(t-a+b)\,1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\cdot 1(t-b)\} = e^{-bp}\,\mathcal{L}\{f(t+b)\,1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-b)\,1(t-b)\} = e^{-bp}\,F(p)$$

$$\frac{p}{(p^2+1)\cdot(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p-1}$$

$$p = (Ap+B)\cdot(p-1) + C(p^2+1)$$

$$p = Ap^2 - Ap + Bp - B + Cp^2 + C$$

$p^2: \quad 0 = A + C \Rightarrow A = -C \Rightarrow C = -A$

$p^1: \quad 1 = -A + B$

$p^0: \quad 0 = -B + C \Rightarrow B = C \Rightarrow B = -A$

$$1 = -A - A \Rightarrow 1 = -2A$$

$$\underline{A = -\tfrac{1}{2}} \quad \underline{B = \tfrac{1}{2}} \quad \underline{C = \tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{(p^2+1)\cdot(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p-1}$$

$$1 = (Ap+B)\cdot(p-1) + C(p^2+1)$$

$$1 = Ap^2 - Ap + Bp - B + Cp^2 + C$$

$p^2: \quad 0 = A + C \Rightarrow C = -A$

$p^1: \quad 0 = -A + B \Rightarrow A = B$

$p^0: \quad 1 = -B + C \qquad C = -B$

$$1 = -B - B$$

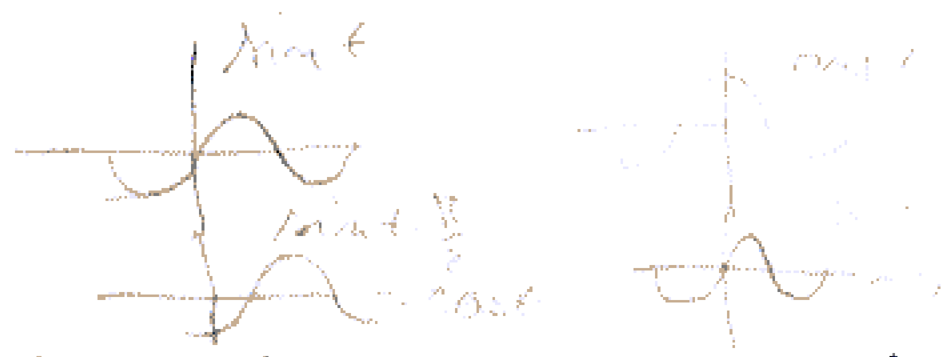
$$1 = -2B \Rightarrow \underline{B = -\tfrac{1}{2}}$$

$$\underline{C = \tfrac{1}{2}} \quad \underline{A = -\tfrac{1}{2}}$$

$$\text{I} \quad \frac{p}{(p^2+1)\cdot(p-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-p+1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}$$

$$\text{II} \quad \frac{1\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}}{(p^2+1)\cdot(p-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-p-1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\text{I}\} = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{t}$$



$$\mathcal{L}^{-1}\{\text{II}\} = -\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{t-\frac{\pi}{2}}$$

$$= +\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^{t-\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\text{III}\} = 2e^{t}$$

$$X(t) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^{t-\frac{\pi}{2}} + 2e^{t}$$

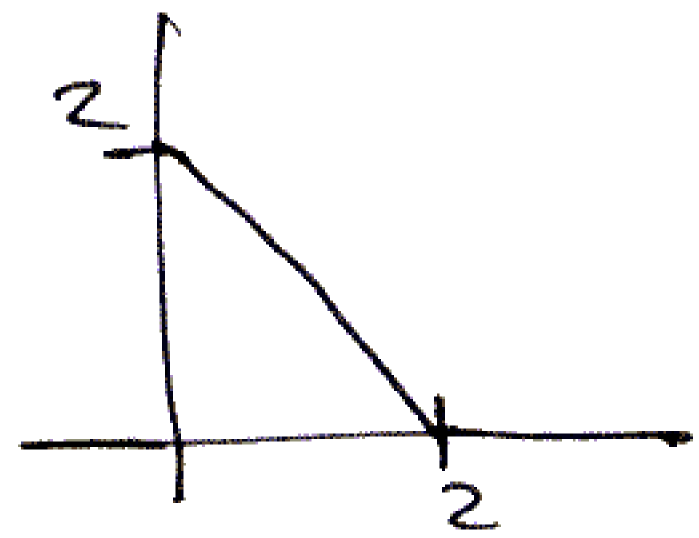
$$X(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{t-\frac{\pi}{2}} + 2e^{t}$$

$$\underline{X(t) = \frac{5}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{t-\frac{\pi}{2}}}$$

PŘ

25.11.95 $\dot{x} - x = f(t)$ $x(0+) = -1$ $f(t) = \begin{cases} 2-t, & t \in (0,2) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$$\dot{X} = pX - X(0+)$$
$$\ddot{X} = p^2 X - pX(0+) - \dot{X}(0+)$$



$$f(t) = (2-t)\left[1(t) - 1(t-2)\right] =$$

$$(2-t)\,1(t) - (2-t)\,1(t-2) =$$
$$= (2-t)\,1(t) + (t-2)\,1(t-2)$$

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + e^{-2p} \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a) \cdot 1(t-b)\} = e^{-bp} \cdot \mathcal{L}\{f(t-a+b)\,1(t)\}$$
$$\mathcal{L}\{f(t-b) \cdot 1(t-b)\} = e^{-bp} F(p)$$
$$(t-2) \cdot 1(t-2) = e^{-bp} \cdot \frac{1}{p^2} \qquad (t-2+2)\,1t = t$$

$$pX - X + 1 = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}\left(e^{-2p} - 1\right)$$
$$X(p-1) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}\left(e^{-2p} - 1\right) - 1$$
$$X = \frac{2}{p(p-1)} + \frac{e^{-2p} - 1}{p^2(p-1)} - \frac{1}{p-1}$$

$$\frac{2}{p(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} = \frac{-2}{p} + \frac{2}{p-1}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{p} + \frac{2}{p-1}\right\} = -2 + 2e^t = \underline{2(e^t - 1)}$$

$$\frac{e^{-2p}}{p^2(p-1)} = \frac{e^{-2p}}{p^2(p-1)} - \frac{1}{p^2(p-1)}$$

$$e^{-2p}\cdot\left(\frac{1}{p^2(p-1)}\right) = e^{-2p}\left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p-1}\right) = e^{-2p}\left(-\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\right)$$

$$1 = a(p-1) + bp(p-1) + cp^2$$

p^2: $\quad 0 = B + C \Rightarrow C = 1$

p^1: $\quad 0 = A - B \Rightarrow B = -1$

p^0: $\quad 1 = -A \Rightarrow A = -1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-2p}\left(-\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\right) + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\right\} =$$

$$= -(\cancel{t}-2) - \cancel{1} + e^{t-2} + \cancel{t} + \cancel{1} - e^t = 2 + e^{(t-2)} - e^t =$$

$$= 2 + \frac{e^t}{e^2} - e^t = \underline{2 + e^t(e^{-2}+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} = e^t$$

$$x = 2(e^t - 1) + 2 + e^t(e^{-2} - 1) - e^t$$

$$x = 2e^t - \cancel{2} + \cancel{2} + e^t(e^{-2} - 1) - e^t$$

$$x = \underline{\underline{e^t(2 + e^{-2} - 1 + 1) = e^{t-2}}}$$

(pr.)

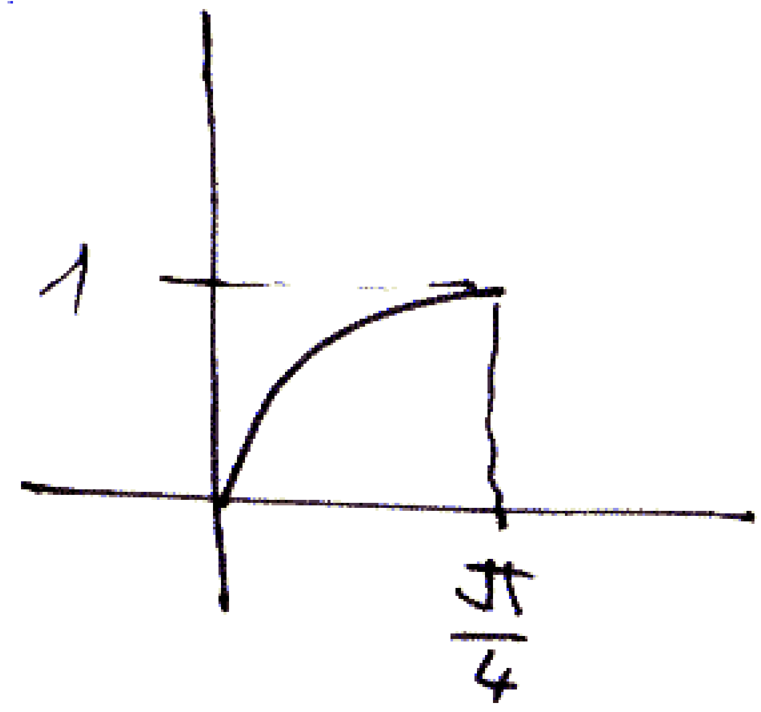
11.7.95

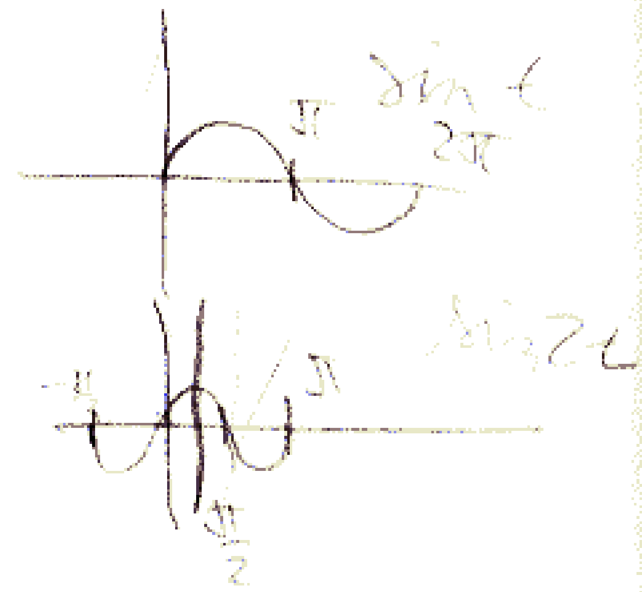
$\dot x + 3x = f(t) \quad x(0+) = 2 \quad f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & t\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$\dot X = pX - X(0+)$

$pX - 2 + 3X = F(p)$

$X(p+3) = F(p) + 2$





$f(t) = \sin 2t\left[1(t) - 1(t-\frac{\pi}{4})\right] = \sin 2t\cdot 1t - \sin 2t\cdot 1(t-\frac{\pi}{4})$

$F(p) = \frac{2}{p^2+4} - e^{-\frac{\pi}{4}p}\cdot \mathcal{L}\{\underbrace{\sin 2(t+\tfrac{\pi}{4})}_{\cancel{\sin 2t}\ \cos 2t}\} =$

$= \frac{2}{p^2+4} - e^{-\frac{\pi}{4}p}\cdot \mathcal{L}\{\sin(2t+\frac{\pi}{2})\} = \frac{2}{p^2+4} - e^{-\frac{\pi}{4}p}\cdot \mathcal{L}\{\cos 2t\}$

$= \frac{2}{p^2+4} - e^{-\frac{\pi}{4}p}\cdot \frac{p}{p^2+4} = \frac{1}{p^2+4} - e^{-\frac{\pi}{4}p}\left(2 - pe^{-\frac{\pi}{4}p}\right)$

$X(p+3) = \frac{2}{(p^2+4)} - \frac{p}{(p^2+4)}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}p} + 2 \qquad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{p+3}\} = 2\cdot e^{-3t}$

$X = \frac{2}{(p^2+4)\cdot(p+3)} - \frac{p\cdot e^{-\frac{\pi}{4}p}}{(p^2+4)\cdot(p+3)} + \frac{2}{p+3}$

$\frac{2}{(p^2+4)\cdot(p+3)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{C}{p+3}$

$\frac{2}{(p^2+4)\cdot(p+3)} = \frac{2}{13}\left(\frac{1}{p+3} - \frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{p^2+4}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\{\ \} = \frac{2}{13}\left(e^{-3t} - \cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)$

$\frac{p\cdot e^{-\frac{\pi}{4}p}}{(p^2+4)\cdot(p+3)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{C}{p+3}$

$= e^{-\frac{\pi}{4}p}\left(\frac{6}{26}\cdot\frac{p}{p^2+4} + \frac{4}{26}\cdot\frac{2}{p^2+4} - \frac{3}{13}\cdot\frac{1}{p+3}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\{\ \} = \frac{3}{13}\cos 2(t-\frac{\pi}{4}) + \frac{2}{13}\sin 2(t-\frac{\pi}{4}) - \frac{3}{13}e^{-3(t-\frac{\pi}{4})}$

$$X = \frac{2}{13}e^{-3t} - \frac{2}{13}\cos 2t + \frac{3}{13}\sin 2t + \frac{3}{13}\cos 2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{13}\sin 2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{13}e^{-3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)} + 2e^{-3t}$$

$$X = \frac{1}{13}\left(25e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\sin 2t + 3\cos 2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin 2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) - 3e^{\dots}\right.$$

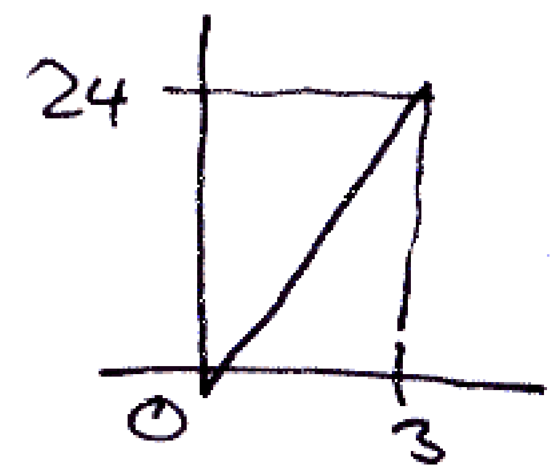
Př

23.11.96

$$\dot{x} + 2x = f(x) \qquad x(0+) = -4 \qquad f(t) = \begin{cases} 8t, & t \in (0,3) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$\dot{X} = pX - x(0+)$$

$$pX + 4 + 2X = F(p)$$



$$f(t) = 8t\left[1(t) - 1(t-3)\right] = 8t\,1(t) - 8t\,1(t-3)$$

$$F(p) = \frac{8}{p^2} - e^{-3p}\cdot\mathcal{L}\{8(t+3)\} = \frac{8}{p^2} - e^{-3p}\cdot\frac{8}{p^2} - e^{-3p}\frac{24}{p}$$

$$= \frac{8}{p^2} + e^{-3p}\left(-\frac{8}{p^2} - \frac{24}{p}\right)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\cdot 1(t-b)\} = e^{-bp}\cdot\mathcal{L}\{f(t+b)\cdot 1(t)\}$$

$$X(p+2) = \frac{8}{p^2} - e^{-3p}\cdot\frac{8}{p^2} - e^{-3p}\cdot\frac{24}{p} - 4$$

$$X = \overset{\mathrm{I}}{\frac{8}{p^2(p+2)}} - \overset{\mathrm{II}}{\frac{8}{p^2(p+2)}}\cdot e^{-3p} - \overset{\mathrm{III}}{\frac{24}{p(p+2)}}\cdot e^{-3p} - \overset{\mathrm{IV}}{\frac{4}{p+2}}$$

I. $$\frac{8}{p^2(p+2)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+2} = \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{2}{p+2}$$

$$8 = A(p+2) + Bp(p+2) + Cp^2$$

p^2: $B + C = 0 \Rightarrow C = 2$

p^1: $A + 2B = 0 \Rightarrow B = -2$

p^0: $2A = 8 \Rightarrow A = 4$

III. $$\frac{24}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} = \frac{12}{p} - \frac{12}{p+2}$$

I $\mathcal{L}^{-1}\{\} = 4t - 2 + 2\cdot e^{-2t}$

II $\mathcal{L}^{-1}\{\} = 4(t-3) - 2 + 2\cdot e^{-2(t-3)}$

III $\mathcal{L}^{-1}\{\} = 12 - 12e^{-2(t-3)}$

IV $\mathcal{L}^{-1}\{\} = -4e^{-2t}$

$$X = 4t - 2 + 2e^{-2t} - 4t + 12 + 2 - 2e^{-2(t-3)} - 12 + 12e^{-2(t-3)} - 4e^{-2t}$$

$$X = -2e^{-2t} + 10e^{-2(t-3)} = -2e^{-2t} + 10e^{-2t}\cdot e^{6} = e^{-2t}(-2 + 10e^{6})$$

Extrémy funkcí více proměnných

① největší a nejmenší hodnota na množině

Př. nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce

$f(x,y) = x^2+y^2-4x+2y$ na množině

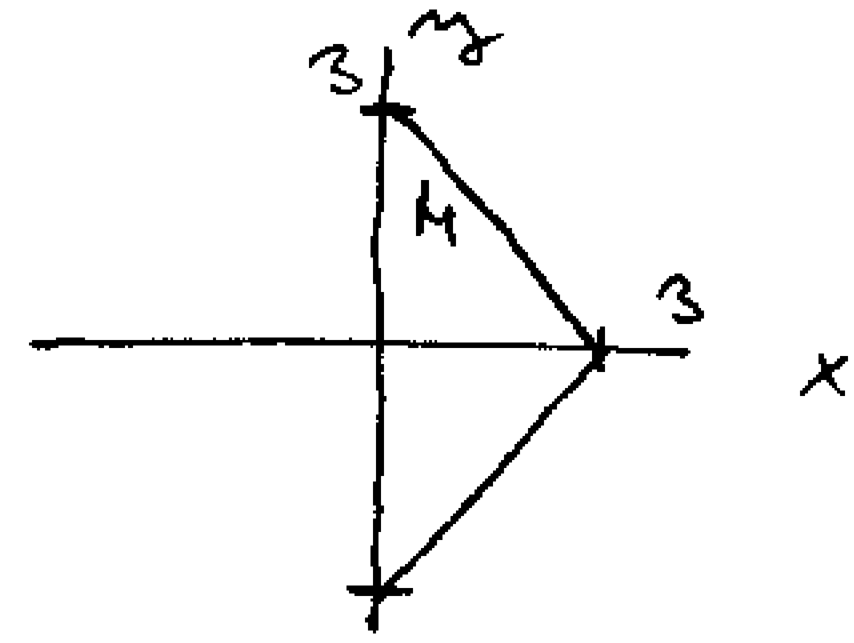
$M=\{(x,y),\ x+|y|\le 3,\ x\ge 0\}$ abs. extrém

$y>0:\quad x+y\le 3$

$\qquad\qquad y\le 3-x$

$y<0:\quad x-y\le 3$

$\qquad\qquad y\ge x-3$



uvnitř M

stac. body

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-4 = 0 \Rightarrow \underline{x=2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+2 = 0 \Rightarrow \underline{y=-1}$

stac. bod $A=[2,-1]$ může být extrém $f(2,-1)=4+1-8-2=\underline{\underline{-5}}$

na hranici M

① $x\in\langle 0,3\rangle$ a $y=3-x$

$f(x,3-x) = x^2+(3-x)^2-4x+2(3-x) = 2x^2-12x+15$

$f'(x,3-x) = 4x-12=0 \Rightarrow 4(x-3)=0 \Rightarrow \underline{x=3},\ y=3-x$

$\underline{y=3-3=0}$ $\quad \underline{f(3,0)=-3}$

② $x\in\langle 0,3\rangle$ a $y=x-3$

$f(x,x-3) = x^2+(x-3)^2-4x+2(x-3) = 2x^2-8x+3$

$f'(x,x-3) = 4x-8=0 \quad 4(x-2)=0 \Rightarrow \underline{x=2},\ y=x-3=\underline{-1}$

$\underline{f(2,-1)=-5}$

③ $x=0$ a $y\in\langle -3,3\rangle$

$f(0,y) = y^2+2y$

$f'(0,y) = 2y+2=0 \Rightarrow 2(y+1)=0 \Rightarrow \underline{y=-1},\ \underline{x=0}$

$\underline{f(0,-1)=-1}$

v rozích

$\underline{f(0,3) = 9+6 = 15}$

$\underline{f(0,-3) = 9-6 = 3}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \max f(x,y):\ f(0,3)=15 \\ \min f(x,y):\ f(2,-1)=-5 \end{array}\Bigg\}\ \text{na } (x,y)\in M}$$

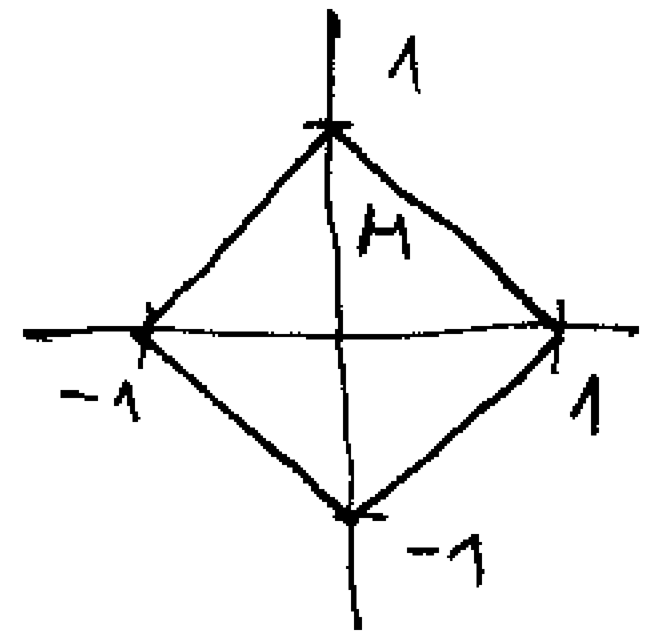
Př. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu fce $f(x,y) = x^2 - xy + y$ na množině $M = \{(x,y);\ |x|+|y| \le 1\}$

$x>0 \quad y>0 \quad x+y \le 1 \quad y \le 1-x$

$x<0 \quad y>0 \quad -x+y \le 1 \quad y \le 1+x$

$x>0 \quad y<0 \quad x-y \le 1 \quad y \ge x-1$

$x<0 \quad y<0 \quad -x-y \le 1 \quad y \ge -x-1$



uvnitř M

stac. body jsou řešením soustavy!

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0$

$4y - y = 0 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0$

$4x - x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

stac. bod $f(0,0) = 0$

na hranici M:

(1.) $x \in \langle 0,1\rangle,\ y = 1-x$

$f(x,1-x) = 3x^2 - 3x + 1 \qquad f'(x,1-x) = 6x - 3 = 0;\ 6(x-\frac{1}{2}) = 0$

$x = \frac{1}{2},\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

(2) $x \in \langle 0,1\rangle,\ y = x-1$

$f(x,x-1) = x^2 - x + 1 \qquad f'(x,x-1) = 2x - 1 = 0;\ 2(x-\frac{1}{2}) = 0$

$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \qquad f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

(3) $x \in \langle -1,0\rangle,\ y = 1+x$

$f(x,1+x) = x^2 + x + 1 \qquad f'(x,1+x) = 2x + 1 = 0,\ 2(x+\frac{1}{2}) = 0$

$x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \qquad f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

(4.) $x \in \langle -1,0\rangle\ y = -x-1$

$f(x,-x-1) = 3x^2 + 3x + 1 \qquad f'(x,-x-1) = 6x + 3 = 0;\ 3(\cancel{x}+1) = 0$

$x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2} \qquad f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

dále rohy

$f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = 1$

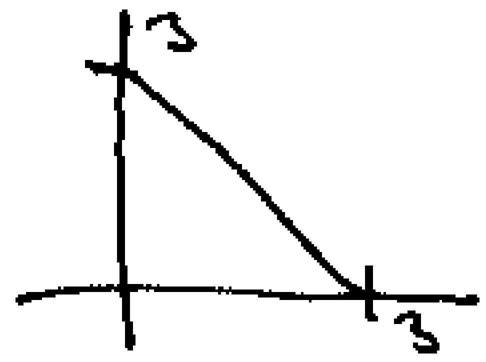
$\max f(x,y) = 1$

$\min f(x,y) = 0$

na $(x,y) \in M$

př.

21.9.95 $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ $M = \{(x,y) ; x \ge 0, y \ge 0, y \le 3-x\}$



uvnitř M:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x = 0 \Rightarrow x = y \qquad 2x + 4x - 6 = 0$$

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1$$

stac. bod $A[1,1]$ $f(1,1) = -4$

na hranicích

1. $x \in \langle 0,3 \rangle, y = 0$

$f(x,0) = x^2 - 6x - 1$ $f'(x,0) = 2x - 6 = 0 ;\ x = 3, y = 0$

$f(3,0) = -10$

2. $x \in \langle 0,3 \rangle, y = 3 - x$

$f(x,3-x) = -5x^2 + 18x - 19$ $f'(x,3-x) = -10x + 18 = 0 ;\ x = \frac{9}{5}, y = \frac{6}{5}$

$f\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right) = -\frac{88}{25} = -3{,}52$

3. $y \in \langle 0,3 \rangle, x = 0$

$f(0,y) = -2y^2 - 1$ $f'(0,y) = -4y = 0 ;\ x = 0, y = 0$

$f(0,0) = -1$

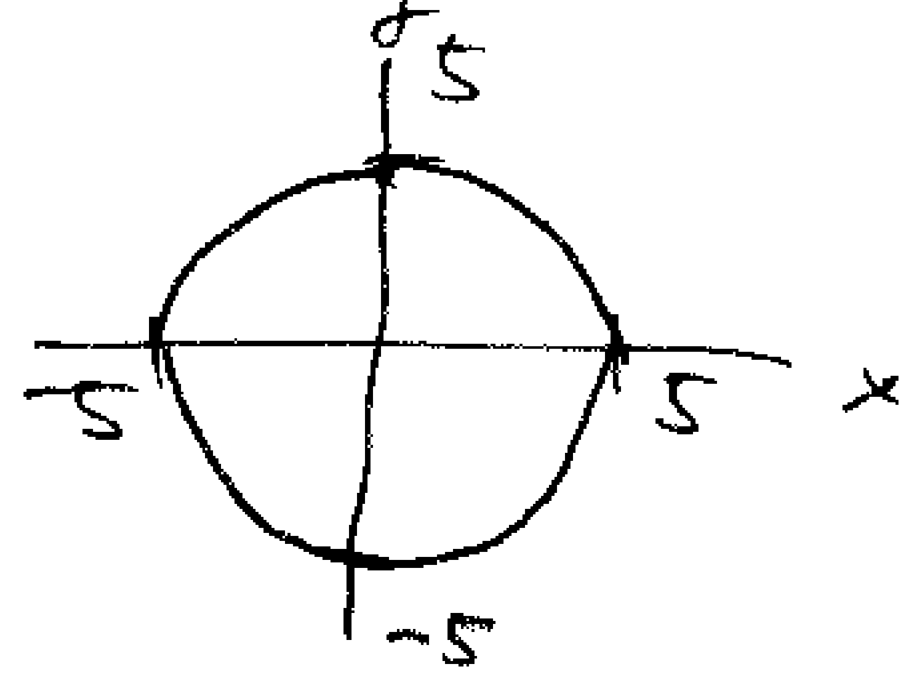
dále

$f(0,3) = -19$

$$\boxed{\begin{array}{l} \max f(x,y) = -1 \\ \min f(x,y) = -19 \end{array}}$$

(Př) $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y \quad M=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 25\}$

25.11.15



uvnitř M:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-12=0 \qquad \underline{x=-6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+16=0 \qquad \underline{y=8}$$

stac. bod $A[-6,8] \Rightarrow f(-6,8)$ je mimo M!

na hranici M

Lagrangeova fce $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y-\lambda(x^2+y^2-25)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x-12-2\lambda x=2x(1-\lambda)-12=0$$

$$x(1-\lambda)=6 \Rightarrow x=\frac{6}{1-\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+16-2\lambda y=2y(1-\lambda)+16=0$$

$$y(1-\lambda)=-8 \Rightarrow y=\frac{-8}{1-\lambda}$$

hranice $x^2+y^2=25 \quad \xleftarrow{\text{dosadíme}}$

$$\frac{36}{(1-\lambda)^2}+\frac{64}{(1-\lambda)^2}=25 \Rightarrow \frac{100}{(1-\lambda)^2}=25$$

$$100=25(1-2\lambda+\lambda^2) \Rightarrow 4=1-2\lambda+\lambda^2$$

$$\underline{\lambda^2-2\lambda-3=0} \qquad \lambda_{1,2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$$

λ_1: $B[x_1,y_1]$ $\quad x_1=\frac{6}{1-3}=\frac{6}{-2}=-3,\ y_1=\frac{-8}{-2}=4$

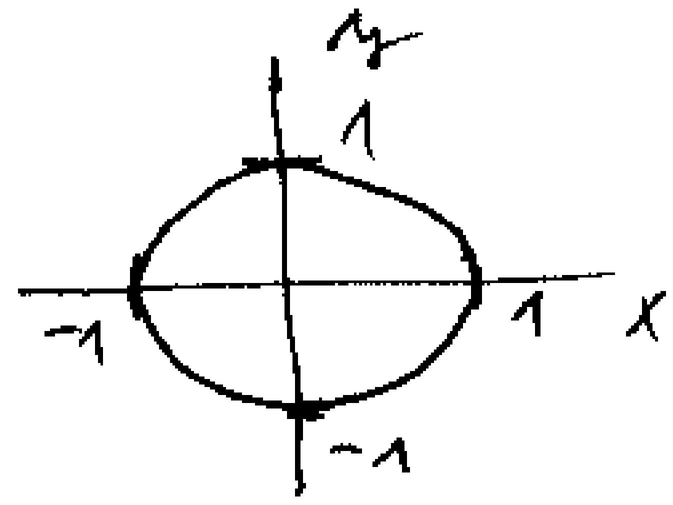
$B[-3,4]$ $\quad \underline{f(-3,4)=125}$ MAX

λ_2: $C[x_2,y_2]$ $\quad x_2=\frac{6}{1+1}=3,\ y_2=-\frac{8}{2}=-4$

$C[3,-4]$

$\underline{f(3,-4)=-75}$ MIN

PF $\quad f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad M = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$



uvnitř M

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \qquad x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \qquad y = 0$

stac bod $A[0,0] \Rightarrow f(0,0) = 0$

na hranici M

$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

1. $x \in \langle -1,1 \rangle,\ y = \sqrt{1-x^2}$

$f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1$ MIN

$f'(x, \sqrt{1-x^2}) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 1 \quad f(0,1) = -1$

2. $x \in \langle -1,1 \rangle \quad y = -\sqrt{1-x^2}$

$f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1$

$f'(x, \sqrt{1-x^2}) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = -1 \quad f(0,-1) = -1$

$f(1,0) = 1$ MAX

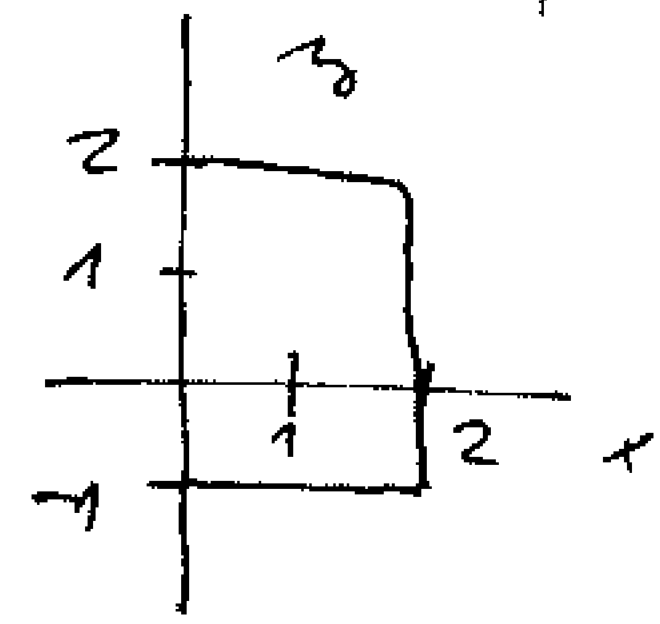
$y^2 = 1 - x^2: \quad x = 0,\ y = \pm 1 \quad f() = -1$

$x^2 = 1 - y^2: \quad y = 0,\ x = \pm 1 \quad f() = 1$

(Př.)

20.4.96. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ M - obdélník s vrcholy $(0,-1); (2,-1); (2,2); (0,2)$

uvnitř M



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

$3y^2 = 3x$

$y^2 = x \Rightarrow 3y^4 - 3y = 0$

$3(y^4 - y) = 0$

$y^4 - y = 0$

$y(y^3 - 1) = 0$

$y = 0, \; x = 0$

$y = 1, \; x = 1$

stac. body

$A[0,0] \Rightarrow f(0,0) = 0$

$B[1,1] \Rightarrow f(1,1) = 1+1-3 = -1$

na hranici M:

(1.) $x \in \langle 0,2 \rangle, \; y = -1$

$f(x,-1) = x^3 - 1 + 3x \quad f'(x,-1) = 3x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -1$

(2.) $x \in \langle 0,2 \rangle, \; y = 2$

$f(x,2) = x^3 + 8 - 6x \quad f'(x,2) = 3x^2 - 6 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}, \; y = 2$

ale $x \in \langle 0,2 \rangle$

$f(\sqrt{2},2) = 2{,}34$

(3.) $y \in \langle -1,2 \rangle, \; x = 0$

$f(0,y) = y^3 \quad f'(0,y) = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, \; x = 0$

$f(0,0) = 0$

(4.) $y \in \langle -1,2 \rangle, \; x = 2$

$f(2,y) = 8 + y^3 - 6y \quad f'(2,y) = 3y^2 - 6 = 0$

$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

$x = 2, \; y = \sqrt{2}$

$f(2,\sqrt{2}) = 2{,}83$

dále

$f(0,2) = 8$

$f(2,-1) = 8 - 1 + 6 = 13$ MAX

$f(0,-1) = -1$ MIN

$f(2,2) = 4$

(2.) Lokální extrémy

Př. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2\cdot e^{-x^2}$

stac. body:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4x\cdot e^{-x^2} \qquad x(2-4e^{-x^2}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \qquad y = 0$$

$$2x(1-2e^{-x^2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{\ln 2} \\ x_3 = -\sqrt{\ln 2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A = [0,0] \\ B\ [\sqrt{\ln 2}, 0] \\ C\ [-\sqrt{\ln 2}, 0] \end{array}$$

$$2e^{-x^2} = 1$$

$$e^{-x^2} = \frac{1}{2}$$

$$-x^2 = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\ln 2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 4e^{-x^2} + 8x e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad D^2 f = (2 + 8xe^{-x^2} - 4e^{-x^2})\,dx^2 - 2\,dy^2$$

$$D^2 f(A) = -2\,dx^2 - 2\,dy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Sylvestrovo kritérium:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = -2 \\ \Delta_2 = 4 \end{array}$$

střídá znaménka $\Rightarrow$ neg. definitní

$\Rightarrow$ ostré lokální maximum

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Pokud $\Delta_k > 0$ ... pozitivně definitní

lok. minimum

$(-1)^k \Delta_k > 0$ ... negativně definitní

$(-, +, -, +)$

lok. maximum

$\Delta_k = 0$ ... indefinitní

(PF) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

stac. body:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$ $\Rightarrow$ $x = y$ $\quad y(y-1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, x_1 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$ $\quad 3y^2 - 3y = 0$ $\quad \cancel{y^2(y-1)}$ $\quad y_2 = 1, x_2 = 1$

$\cancel{y^2 = y}$ $\quad A[0,0] \quad B[1,1]$

	A	B
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$	0	6
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$	-3	-3
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$	0	6

$D^2 f = 6x\,dx^2 - 3dx\,dy + 6y\,dy^2$

A: $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ indefinitní $\Rightarrow$ není extrém

B: $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \Delta_1 = 6 \\ \Delta_2 = 27 \end{matrix}\right\}$ poziit. definitní Lok. minimum v $B[1,1]$

(PF.) $f(x,y) = 3x^2 + y^3 - 6xy - 9y + 2$

8.7.97 stac. body

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y = 0$ $\quad 6x = 6y \Rightarrow x = y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x - 9 = 0$ $\quad 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad x_{1,2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$A = [-1,-1] \quad B = [3,3]$

	A	B
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$	6	6
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$	-6	18
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$	-6	-6

$D^2 f = 6\,dx^2 - 6dx\,dy + 6y\,dy^2$

A $\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \Delta_1 = 6 \\ \Delta_2 = -36 - 36 = 0 \end{matrix}\right\}$ indefinitní

B $\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \Delta_1 = 6 \\ \Delta_2 = 108 - 36 = 72 \end{matrix}\right\}$ pozitivně definitní Lok. minimum v $B[3,3]$

15.4.2000 Lok. extrémy

$$f(x,y) = xy(3-x-y) = 3xy - x^2y - xy^2$$

stac. body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow \cancel{y\ldots} \quad x = \frac{3y-y^2}{2y} = \frac{3}{2} - \frac{y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy = 0$$

$3 \cdot 4 = 12$ $\quad \cancel{3\left(\frac{3y-y^2}{2y}\right.}$

$$3\left(\frac{3}{2} - \frac{y}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 - 2y\left(\frac{3}{2} - \frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{9}{2} - \cancel{\frac{3}{2}y} - \frac{9}{4} + \cancel{\frac{3}{2}y} - \frac{y^2}{4} - 3y + y^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 0 \quad / \cdot \frac{4}{3}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} =$$

$$y_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} - (\pm\sqrt{3}) = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$$
$$\frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 3 - 2x - 2y$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$\Delta_k > 0$ ... poz. d. lok. min

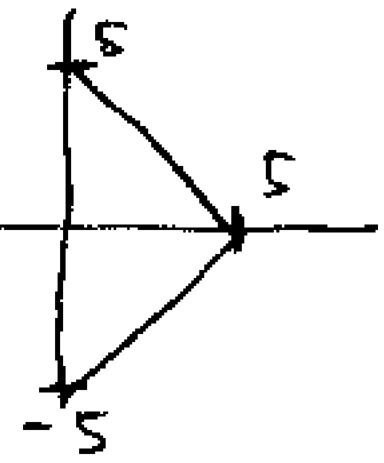
$(-1)^k \Delta_k > 0$ neg. d. lok. max

$(-1, +, -, +)$

18.4.98 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$ $M = \{(x,y) \mid x + |y| \leq 5,\ x \geq 0\}$

$y > 0: \quad x + y \leq 5 \Rightarrow y \leq 5 - x$

$y < 0: \quad x - y \leq 5 \Rightarrow y \geq -5 + x$



uvnitř M

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 \Rightarrow A = [2,-1]$ stac. bod $A[2,-1] =$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2$ $f(2,-1) = \underline{\underline{-5}}$

na hranici

1. $x \in 0,\ y \in \langle -5, 5 \rangle$

$f(0,y) = y^2 + 2y$

$f'(0,y) = 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1,\ x = 0$ $f(0,-1) = -1$

2. $x \in \langle 0, 5 \rangle$ $y = 5 - x$

$f(x, 5-x) = x^2 + (5-x)^2 - 4x + 2(5-x) = \ldots$

3. $x \in \langle 0, 5 \rangle$ $y = -5 + x$

Př $f(x,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$

stac. body:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{x}(x+y^2+2y) + e^{2x} = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{2x}y + 2e^{2x} = e^{2x}(2y+2) = 0$$

$$2x+2y^2+4y+1 = 0$$

$$y+1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$2x+2-4+1 = 0$$

$$2x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{stac. bod } A = \left[\tfrac{1}{2}, -1\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) + 2e^{2x} = 2e^{2x}(2x+2y^2+4y+2) = 4e^{2x}(x+y^2+2y+1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4e^{2x}y + 4e^{2x} = 4e^{2x}(y+1)$$

A
2e
2e
0

$$A: \begin{vmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{vmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2e \\ \Delta_2 = 4e^2 \end{array}\right\}$ pozitivně definitní
lok. minimum

Př $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

stac. body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 2y(x+1) = 0$$

$y = 0,\ x = -1$

$x = -1$

$x = -1 \Rightarrow 6 + y^2 - 10 = 0$

$y^2 = 4 \quad A = [-1, 2]$

$y = \pm 2 \quad B = [-1, 2]$

$y = 0 \Rightarrow 6x^2 + 10x = 0 \quad C = [0, 0]$

$x(6x+10) = 0 \quad D = \left[-\tfrac{5}{3}, 0\right]$

$x = 0,\ x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

A	B	C	D
-2	-2	10	-10
0	0	2	$-\frac{4}{3}$
4	-4	0	0

$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}$
$\Delta_1 = -2$	$\Delta_1 = -2$	$\Delta_1 = 10$	$\Delta_1 = -10$
$\Delta_2 = -4$	$\Delta_2 = -4$	$\Delta_2 = 20$	$\Delta_2 = \frac{40}{3}$
indef	indef	pozd. lok min	neg. def lok max

Funkce definované implicitně

(Př) $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$

$y=y(x)$ $\quad 2x+2y+2xy'+2y\cdot y'-4+2y'=0$

$$y'(2x+2y+2)=4-2x-2y$$

$$y'=\frac{4-2x-2y}{2x+2y+2}=\frac{\cancel{2}(2-x-y)}{\cancel{2}(1+x+y)}$$

extrém $\quad y'(x)=0 \Rightarrow 2-x-y=0$

Stac. bod: $\quad x+y=2 \rightarrow y=2-x$

$$x+y=2$$

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$$

$$x^2+2x(2-x)+(2-x)^2-4x+2(2-x)-2=0$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{4x}-\cancel{2x^2}+\cancel{4}-\cancel{4x}+\cancel{x^2}-4x+\cancel{4}-2x-\cancel{2}=0$$

$$6-6x=0$$

$A=[1,1]$ $\qquad x=1 \rightarrow y(1)=2-1=1$

2. derivace

$$y''(2x+2y+2)+y'(2+2y')=-2-2y'$$

dosadíme $x=1,\ y(1)=1$ $\quad y'(1)=\frac{2-1-y(1)}{1+1+y(1)}=\frac{2-1-1}{1+1+1}=0$

$$y''(2+2+2)+0=-2$$

$$y''=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}<0$$

$x=1$
$y(1)=1$
$y'(1)=0$
$y''(1)=-\frac{1}{3}$

$\Downarrow$ lokální maximum

Př. $x^2 \cdot y^3 + y - 3 = 0$

$y = y(x)$ $\quad 2x \cdot y^3 + x^2 3y^2 \cdot y' + y' = 0$

$$y'(1 + x^2 \cdot 3y^2) = -2xy^3$$

$$y' = \frac{-2xy^3}{1 + x^2 + 3y^2} \qquad y'(x) = 0 \Rightarrow -2xy^3 = 0$$

$\Downarrow$

$\underline{x = 0}$ nebo

pak $y'(0) = 0$ $\qquad$ $x^2 y^3 + y - 3 = 0$

$0 \cdot y^3 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

$y(0) = 3$

2. derivace

$$y''(1 + x^2 \cdot 3y^2) + y'(6xy^2 + 6x^2 y \cdot y') = -2y^3 - 6xy^2 y'$$

dosadíme $\quad x = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 0$

$$y'' = -2 \cdot 27 \Rightarrow y''(0) = -54 < 0 \Rightarrow \text{lok. maximum}$$

Př. Ověřte, že bod $A = [-2,0]$ je stacionárním bodem
18.997 funkce $z(x,y)$ definované rovnicí a
vztahem $z(x,y) < 2$, vypočtěte $z(-2,0)$

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0 \Rightarrow z = z(x,y)$$

1. $4x + 2z \cdot z'_x + 8z + 8x \cdot z'_x - z'_x = 0$

$$z'_x(2z + 8x - 1) = -4x - 8z \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$z'_x = \frac{-8z - 4x}{2z + 8x - 1}$$

2. $4y + 2z \cdot z'_y + 8x\, z'_y - z'_y = 0$

$$z'_y = \frac{-4y}{2z + 8x - 1}$$

dosadíme $A = [-2,0]$ do původní rovnice

$$8 + z^2 - 16z - z + 8 = 0$$

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

$z_{1,2}$: $\cancel{16}$ nesplňuje $z(x,y) < 2$; $\underline{1}$

$x = -2$, $y = 0$, $z = 1$:

$z'_x(-2,0) = 8 - 8 = 0$

$z'_y(-2,0) = \frac{0}{\ldots} = 0$

$\Rightarrow$ je stac. bodem

Extrém – spočítat druhé derivace $z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$ $(-2,0)$

z''_x: $\quad 4 + 2z'_x \cdot z'_x + 2z \cdot z''_x + 8z'_x + 8z'_x + 8xz''_x - z''_x = 0$

$z'_x(-2,0) = 0$ $\quad 4 + 2z''_x - 16z''_x - z''_x = 0$

$z = 1$ $\quad 4 + z''_x(2-16-1) = 0$

$x = -2$

$$z''_x = \frac{-4}{-15} = \frac{4}{15} \Rightarrow \underline{z''_{xx}(-2,0) = \frac{4}{15}}$$

z''_y: $\quad 4 + 2z'_y \cdot z'_y + 2z \cdot z''_y + 8z'_y + 8xz''_y - z'_y = 0$

$$4 + 2z''_y - 16z'' - z''_y = 0$$

$$z''_y(2-16-1) = -4$$

$$z''_y = \frac{-4}{-15} = \frac{4}{15} \Rightarrow \underline{z''_{yy}(-2,0) = \frac{4}{15}}$$

z''_{xy}: $\quad 2z'_y z'_x + 2z \cdot z''_{xy} + 8z'_y + 8xz''_{xy} - z''_{xy} = 0$

$$z''_{xy}(2-16-1) = 0$$

$$\underline{z''_{xy} = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{vmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = \frac{4}{15} \\ \Delta_2 = \frac{16}{225} \end{matrix}\right\} \text{pozitivně def.} \Rightarrow \underline{\text{lok MIN.}}$$

Př 19.4.97

Prověřte, zda-li body $A=[0,1]$, $B=[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $C=[\frac{1}{2},1]$ jsou stacionární body fce

$$f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$$

vypočtěte zda v nich má funkce extrém a určete typ extrému

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-2x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y=0$$

$A[0,1]$ $\quad 0=0$, $4-4=0$ je

$B[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $\quad 1-1=0$, $\frac{1}{2}-2\neq 0$ není

$C[\frac{1}{2},1]$ $\quad 1-1=0$, $4-4=0$ je

$A[0,1]$ a $C[\frac{1}{2},1]$ jsou stac. body

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

A	C
-2	4
8	8
0	0

$A:\ \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}$ $\quad \Delta_1=-2$, $\Delta_2=-16$ indef

$C:\ \begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}$ $\quad \Delta_1=4$, $\Delta_2=32$ pozdef

lok. minimum

Př Ověřte, že bod $A[1,-1]$ je stac. bodem funkce $z(x,y)$ definované implicitně rovnicí $z(x,y)>0$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0 \qquad z=z(x,y)$$

I $\quad 2x+2z\cdot z'_x-2-4z'_x=0$

$$z'_x(2z-4)=2-2x$$

$$z'_x=\frac{2-2x}{2z-4}$$

II $\quad 2y+2z z'_y+2-4z'_y=0$

$$z'_y(2z-4)=-2-2y$$

$$z'_y=\frac{-2-2y}{2z-4}$$

dosadíme $A[1,-1]$ do zadl. rovnice

$$1+1+z^2-2-2-4z-10=0$$

$$z^2-4z-12=0 \qquad z_{1,2}=\begin{cases}6\\ \cancel{-2}\end{cases} \quad z(x,y)>0$$

$x = 1$ $\quad z'_x(1,-1) = 0$

$y = -1$ $\quad$ } je stac. bodem

$z = 6$ $\quad z'_y(1,-1) = 0$

Extrém – spočtu druhé derivace z''_x, z''_y, z''_{xy} v $(1,-1)$

z''_x : $\quad 2 + 2z'_x \cdot z'_x + 2z''_x - 4z''_x = 0$

$z''_x(2-4) = -2$

$z''_x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ $\quad$ ~~$z''_x(1,-1) = 2/3$~~

$z''_x(1,-1) = \frac{2}{3}$

z''_y $\quad 2 + 2z'_y \cdot z'_y + 2z''_y - 4z''_y = 0$

$z''_y(1,-1) = \frac{2}{3}$

z''_{xy} $\quad -4z''_{xy} = 0$

$z''_{xy}(1,-1) = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \frac{2}{3}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{pozitivně definitní} \Rightarrow \text{lok. MAX}$$

Vázaný extrém s 1 vazební podmínkou

(Př) Nalezněte lok. extrémy funkce na

16.9.99 $\quad f(x,y) = x^2+2y^2$ na množině

$$M = \{(x,y);\ x^2-2x+2y^2+4y=0\}$$

$$L(x,y,\lambda) = x^2+2y^2-\lambda(x^2-2x+2y^2+4y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x-2x\lambda+2\lambda = 2x-\lambda(2x-2)=0$$

$$2x(1-\lambda) = -2\lambda \Rightarrow \underline{x = \frac{-\lambda}{1-\lambda}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y-4y\lambda-4\lambda=0 \Rightarrow 4y(1-\lambda)=4\lambda \Rightarrow \underline{y=\frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

dosadíme do $x^2-2x+2y^2+4y=0$

$$\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{2\lambda}{1-\lambda}+\frac{2\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{4\lambda}{(1-\lambda)}=0$$

$$\frac{\lambda+2\lambda(1-\lambda)+2\lambda^2+4\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda)^2}=0$$

$$\frac{\lambda^2+2\lambda-2\lambda^2+2\lambda^2+4\lambda-4\lambda^2}{(1-\lambda)^2}=0$$

$$\frac{-3\lambda^2+6\lambda}{(1-\lambda)^2}=0 \Leftrightarrow -3\lambda^2+6\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

Stacionární body:

$\lambda_1=2$: $\quad x=\frac{-2}{1-2},\ y=\frac{2}{1-2} \qquad A=[2,-2]$ pro λ_1

$\lambda_2=0$: $\quad x=0,\ y=0 \qquad B=[0,0]$ pro λ_2

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2-2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4-4\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = 0$$

A	B
-2	2
-4	4
0	0

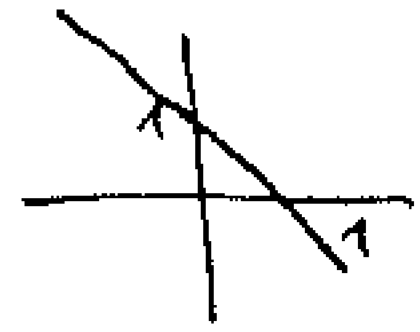
A: $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$ $\quad$ B: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

A: $\Delta_1=-2$, $\Delta_2=8$, neg. def. MAX

B: $\Delta_1=2$, $\Delta_2=8$, poz. def. MIN

Př $f(x,y) = xy \qquad M = \{(x,y) \mid x+y-1=0\}$

$L = xy - \lambda(x+y-1)$



$\frac{\partial L}{\partial x}: \quad y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow y = \lambda$

?

$\frac{\partial L}{\partial y}: \quad x - \lambda = 0 \quad \Rightarrow x = \lambda$

$x + y - 1 = 0$

$\lambda + \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ <u>stac. bod</u> $A\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 = -1$

př

23.11.96

$f(x,y,z) = x+y+z \quad M = \left\{ (x,y,z) ; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \right\}$

$$L = (x,y,z,\lambda) = x+y+z - \lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)$$

$\frac{\partial L}{\partial x}: \quad 1 + \lambda \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \frac{\lambda}{x^2} = -1 \Rightarrow x^2 = -\lambda \Rightarrow \underline{x = j\sqrt{\lambda}}$

$\frac{\partial L}{\partial x}: \quad 1 + \lambda \cdot \frac{1}{y^2} = 0 \qquad y^2 = -\lambda \Rightarrow \underline{y = j\sqrt{\lambda}}$

$\frac{\partial L}{\partial z}: \quad 1 + \lambda \cdot \frac{1}{z^2} = 0 \qquad z^2 = -\lambda \Rightarrow \underline{z = j\sqrt{\lambda}}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$

$\frac{1}{j\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{j\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{j\sqrt{\lambda}} - 1 = 0 \qquad \frac{3}{j\sqrt{\lambda}} = 1 \qquad j\sqrt{\lambda} = 3$

$\sqrt{\lambda} = \frac{3}{j}, \lambda = \frac{9}{j^2}$

$\underline{\lambda = -9}$

Stac bod: $A = [3,3,3]$

$x^2 = -(-9) \quad y^2 = -(-9) \quad z^2 = -(-9)$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\lambda \frac{1}{x^3}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda \cdot \frac{1}{y^3}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = -2\lambda \cdot \frac{1}{z^3}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \frac{2}{3} \quad \Delta_2 = \frac{4}{9} \quad \Delta_3 = \frac{8}{27}$$

poz. def – lok. MIN.

pr

11.7.95

$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad M = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4\}$

$L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2+y^2-4)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \qquad \cancel{x(2-2\lambda)} = 0$

$\qquad 2x = 2\lambda x \ - \text{pro } \lambda = 1$

$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y - 2\lambda y = 0 \qquad -2y = 2\lambda y \ - \text{pro } \lambda = -1$

$x^2 + y^2 = 4$

$\lambda = -1$: $2x + 2x = 0$

$4x = 0$

$\underline{x = 0} \qquad y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\left.\begin{array}{l} A = [0,2] \\ B = [0,-2] \end{array}\right\} \lambda = -1$

$\lambda = 1$: $-2y - 2y = 0$

$-4y = 0$

$\underline{y = 0} \qquad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\left.\begin{array}{l} C = [2,0] \\ D = [-2,0] \end{array}\right\} \lambda = 1$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 - 2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2 - 2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$

A	B	C	D
4	4	0	0
0	0	-4	-4
0	0	0	0

A, B: $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} \quad \cancel{\lambda_1 = 4} \quad \cancel{\lambda_2 = 0}$ ~~indef~~?

$D^2L(A) = D^2L(B) = 4dx^2 > 0 \Rightarrow \text{MIN}$

$D^2L(C) = D^2L(D) = -4dy^2 < 0 \Rightarrow \text{MAX}$

PF

20.9.96

$f(x,y) = x^2 y \qquad M = \{(x,y);\ x^2+y^2=1\}$

Dokončit

$L(x,y,\lambda) = x^2y - \lambda(x^2+y^2-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy - 2\lambda x = 0 \qquad 2xy = 2\lambda x \Rightarrow \lambda = y$

$\frac{\partial L}{\partial y} = x^2 - 2\lambda y = 0 \qquad x^2 = 2\lambda y$

$x^2+y^2-1=0$

$\lambda = y \qquad x^2 = 2y^2 = 2\lambda y \quad (\lambda = y)$

$x^2 = 2y^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x^2+y^2-1=0$

$2y^2+y^2-1=0$

$3y^2=1$

$y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}:\quad A = \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right] \qquad \lambda = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad C = \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

$B = \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right] \qquad D = \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2y - 2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2x$

A	B	C	D
0	0	0	0
$-\frac{2}{\sqrt3}$	$-\frac{2}{\sqrt3}$	$\frac{2}{\sqrt3}$	$\frac{2}{\sqrt3}$
$2\sqrt{\frac23}$	$-2\sqrt{\frac23}$	$2\sqrt{\frac23}$	$-2\sqrt{\frac23}$

$\cancel{A \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac23} \\ 2\sqrt{\frac23} & -\frac{2}{\sqrt3}\end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{\frac23} \\ -2\sqrt{\frac23} & -\frac{2}{\sqrt3}\end{vmatrix} \quad C} \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac23} \\ 2\sqrt{\frac23} & \frac{2}{\sqrt3}\end{vmatrix}$

Diferenciál vazební podmínky

$2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$dx = -\frac{y\,dy}{x}$

$\frac{\frac{1}{\sqrt3}}{\frac{\sqrt2}{\sqrt3}} = \frac{1}{\sqrt2}$

$D^2L(A) = \frac{2\sqrt2}{\sqrt3}dx\,dy - \frac{2}{\sqrt3}dy^2 = -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{y}{x}dy^2 - \frac{2}{\sqrt3}dy^2 = -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{\sqrt2}dy^2 - \frac{2}{\sqrt3}dy^2 = -\frac{4}{\sqrt3}dy^2 < 0$ MAX

totéž pro $D^2L(B)$ – MAX

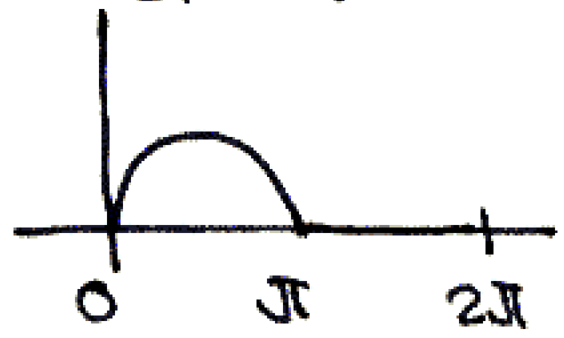
$D^2L(C) = \frac{2\sqrt2}{\sqrt3}dx\,dy + \frac{2}{\sqrt3}dy^2 = -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\overset{-\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{y}{x}}dy^2 + \frac{2}{\sqrt3}dy^2 = \frac{2}{\sqrt3}dy^2 + \frac{2}{\sqrt3}dy^2 = \frac{4}{\sqrt3}dy^2 > 0$ MIN

totéž pro $D^2L(D)$ – MIN

Fourierovy řady

Př. 21.11.98

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \in (0, \pi) \\ 0 & , x \in \langle \pi, 2\pi) \end{cases} \qquad \left(f(t) = \max\{\sin t, 0\} \right)$$



	0	1	2	3
$\cos \pi(k+1)$	-1	1	-1	1
$\cos \pi(1-k)$	-1	1	-1	1
$(-1)^n$	1	-1	1	-1
$(-1)^{n+1}$	-1	1	-1	1

$$T = 2\pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$$

kosinové členy

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot \cos k\omega t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos kt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big(\sin t(1+k) + \sin t(1-k)\big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos t(1+k)}{1+k} - \frac{\cos t(1-k)}{1-k}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+k)t}{1+k} + \frac{\cos(1-k)t}{1-k}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+k)\pi}{1+k} - \frac{\cos 0}{1+k} + \frac{\cos(1-k)\pi}{1-k} - \frac{\cos 0}{1-k}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{1+k} - \frac{1}{1+k} + \frac{(-1)^{k+1}}{1-k} - \frac{1}{1-k}\right] = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\big((-1)^{k+1}-1\big)\cdot(1-k) + \big((-1)^{k+1}-1\big)(1+k)}{(1-k)\cdot(1+k)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\frac{(-1)^{k+1} - \cancel{k(-1)^{k+1}} - 1 + \cancel{k} + (-1)^{k+1} + \cancel{k(-1)^{k+1}} - 1 - \cancel{k}}{} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2(-1)^{k+1} - 2}{1-k^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-(-1)^{k+1}+1}{1-k^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}$$

$$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$$

1. harmonická – $k=1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin 2t = \frac{1}{4\pi}\Big[-\cos 2t\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi}[-1+1] = 0$$

sinové členy

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot \sin k\omega t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin kt\,dt =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(\cos t(1+k) - \cos t(1-k)\big) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin t(1+k)}{1+k} - \frac{\sin t(1-k)}{1-k}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin \pi(1+k)}{1+k} - 0 - \left(\frac{\sin \pi(1-k)}{1-k} - 0\right)\right] = 0 \quad \text{protože } \sin k\pi = 0\,!$$

1. harmonická – $k=1$

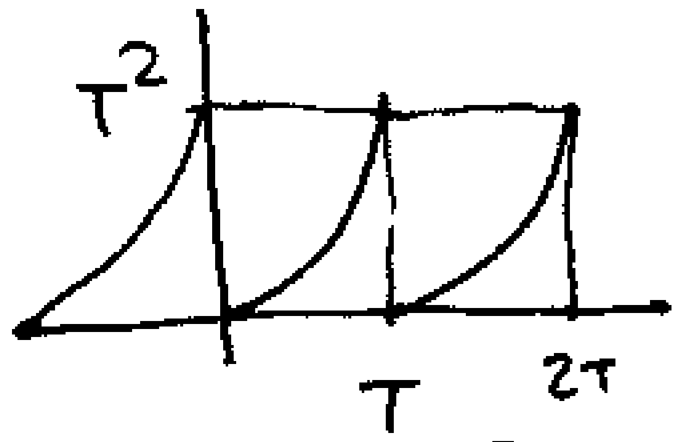
$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi) = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos 2t - \frac{2}{15}\cos 4t$$

Př $f(t)=t^2 \quad t\in(0,T) \quad T>0$

Užitím výsledku pro $t=T$ můžete vyšetřit pro $\frac{\pi^2}{6}$



Dodefinujeme na periodickou funkci o základní periodě T

$$T=T \quad ,\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T t^2\,dt=\frac{2}{3T}\left[t^3\right]_0^T=\frac{2}{3\cancel{T}}\left(T^{\cancel{3}}-0\right)=\underline{\frac{2}{3}T^2}$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T t^2\cdot\cos tk\omega\,dt=\left|\begin{matrix}u'=\cos tk\omega & u=\frac{\sin tk\omega}{k\omega}\\ v=t^2 & v'=2t\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{T}\left[\frac{t^2\sin tk\omega}{k\omega}\right]_0^T-\frac{2}{T}\int_0^T 2t\,\frac{\cos tk\omega}{k\omega}\,dt=\frac{4}{Tk\omega}\int_0^T t\sin tk\omega\,dt=$$

$$\frac{T^2\sin k\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}}{k\frac{2\pi}{T}}=0 \qquad =\left|\begin{matrix}u'=\sin tk\omega & u=-\frac{\cos tk\omega}{k\omega}\\ v=t & v'=1\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{T}k\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}}\left[t\cdot\left(-\frac{\cos tk\omega}{k\omega}\right)\right]_0^T+\frac{2}{k\pi}\int_0^T\frac{\cos tk\omega}{k\omega}=$$

$$=-\frac{2}{k\pi}\left[\frac{T\cdot(-\cos\cancel{T}k\frac{2\pi}{\cancel{T}})}{k\cdot\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\right]+\frac{2}{k\pi\cdot\frac{2\pi}{T}}\left[\frac{\sin tk\omega}{k\omega}\right]_0^T=$$

$$=+\frac{1}{k^2\pi^2}T^2+\frac{\cancel{4}}{k^2\pi^2}\cdot T\underbrace{\sin\cancel{T}k\frac{2\pi}{\cancel{T}}}_{0}=\underline{\underline{\frac{T^2}{k^2\pi^2}}}$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T t^2\sin tk\omega\,dt=\left|\begin{matrix}u'=\sin tk\omega & u=-\frac{\cos tk\omega}{k\omega}\\ v=t^2 & v'=2t\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{T}\left[t^2\cdot\left(-\frac{\cos tk\omega}{k\omega}\right)\right]_0^T-\frac{2}{T}\int_0^T 2t\cdot\left(-\frac{\cos tk\omega}{k\omega}\right)dt=\frac{2}{T}\left(-\frac{T^2}{k\omega}\right)-\left|\right.$$

$$-\left|\begin{matrix}u'=\cos tk\omega & u=-\frac{\sin tk\omega}{k\omega}\\ v=t & v'=1\end{matrix}\right|=-\frac{T^2}{k\pi}-\frac{2}{T}\underbrace{\left[t\cdot-\frac{\sin tk\omega}{k\omega}\right]_0^T}_{0}+\frac{2}{T}\int_0^T-\frac{\sin tk\omega}{k\omega}=$$

$$=-\frac{T^2}{k\pi}+\frac{2}{T}\left[\frac{\cos tk\omega}{k^2\omega^2}\right]_0^T=-\frac{T^2}{k\pi}+\frac{2\cos\cancel{T}k\frac{2\pi}{\cancel{T}}}{T\,k^2\frac{2^2\pi^2}{T^2}}\;0=\underline{\underline{-\frac{T^2}{k\pi}}}$$

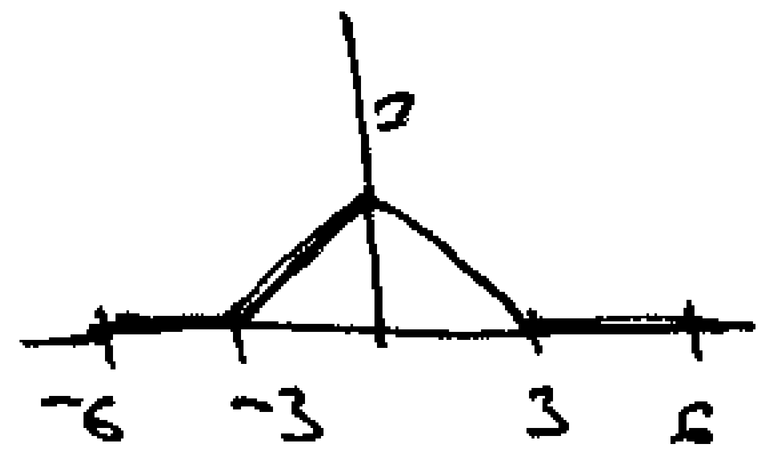
$$\underbrace{\underset{1}{\cos k2\pi}-\underset{1}{\cos 0}}_{0}$$

$$f(t) = \sim \frac{T^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}\cos k\omega t - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^2}{k\pi}\cdot \sin k\omega t$$

---

p17

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t\in(-6,3] \\ t+3 & , t\in(-3,0) \\ 3-t & , t\in(0,3) \\ 0 & , t\in(3,6) \end{cases}$$



$T = 12 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

sudá fce $\underline{b_k = 0}$

$$a_0 = \frac{1}{6}\int_{-6}^{6} f(t)\,dt = \frac{1}{6}\int_{-3}^{0}(t+3)\,dt + \frac{1}{6}\int_{0}^{3}(3-t)\,dt = \frac{1}{6}\left[\frac{t^2}{2}+3t\right]_{-3}^{0} + \frac{1}{6}\left[3t-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{3} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(0-\frac{9}{2}+9\right) + \frac{1}{6}\left(9-\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{6} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$a_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{0}(t+3)\cos k\frac{\pi}{6}t\,dt + \frac{1}{6}\int_{0}^{3}(3-t)\cdot\cos k\frac{\pi}{6}t\,dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u' = \cos kt\frac{\pi}{6} & u = \frac{\sin kt\frac{\pi}{6}}{k\frac{\pi}{6}} \\ v = (t+3) & v' = 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} u' = \cos kt\frac{\pi}{6} & u = \frac{\sin kt\frac{\pi}{6}}{kt\frac{\pi}{6}} \\ v = (3-t) & v' = -1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\underbrace{\left[(t+3)\cdot\frac{\sin kt\frac{\pi}{6}}{k\frac{\pi}{6}}\right]_{-3}^{0}}_{0} - \frac{1}{6k\frac{\pi}{6}}\int_{-3}^{0}\sin kt\frac{\pi}{6}\,dt + \frac{1}{6}\underbrace{\left[(3-t)\cdot\frac{\sin kt\frac{\pi}{6}}{k\frac{\pi}{6}}\right]_{0}^{3}}_{0} + \frac{1}{6k\frac{\pi}{6}}\int_{0}^{3}\sin kt\frac{\pi}{6}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left[-\frac{\cos kt\frac{\pi}{6}}{k\frac{\pi}{6}}\right]_{-3}^{0} + \frac{1}{k\pi}\left[-\frac{\cos kt\frac{\pi}{6}}{k\frac{\pi}{6}}\right]_{0}^{3} =$$

$$= \frac{6}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{6}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{2}k - 1\right) = \frac{12}{k^2\pi^2}\left(1-\cos k\frac{\pi}{2}\right) =$$

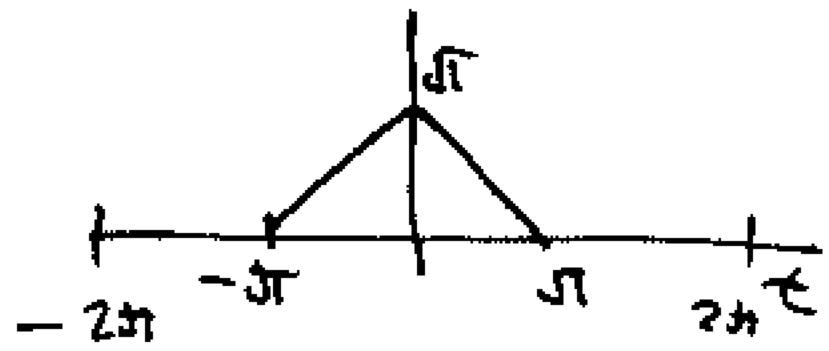
$$= \begin{cases} 0 & k = 4n \\ \frac{12}{k^2\pi^2} & k = \text{lichá } 2n-1 \\ \frac{24}{k^2\pi^2} & k = 4n-2 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^2\pi^2}\cos(2k-1)\frac{\pi}{6}t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{14}{k^2\pi^2}\cos(4k-1)\frac{\pi}{6}t$$

Př

189.97

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t, & t \in (0,\pi) \\ t+\pi, & t \in (-\pi,0) \end{cases}$$



$T = 4\pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ sudá fce $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\,dt + \int_{0}^{\pi}(\pi-t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{t^2}{2}+\pi t\right]_{-\pi}^{0} + \left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi^2\right)+\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\cdot\cos k\frac{1}{2}t\,dt + \int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cdot\cos k\frac{1}{2}t\,dt\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u' = \cos k\frac{1}{2}t & u = \frac{\sin k\frac{1}{2}t}{k\frac{1}{2}} \\ v = t+\pi & v' = 1 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} u' = \cos k\frac{1}{2}t & u = \frac{\sin k\frac{1}{2}t}{k\frac{1}{2}} \\ v = \pi - t & v' = -1 \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\underbrace{\left[(t+\pi)\cdot\frac{2}{k}\cdot\sin\frac{kt}{2}\right]_{-\pi}^{0}}_{0-0} - \frac{k}{2}\int_{-\pi}^{0}\sin\frac{kt}{2}\,dt + \underbrace{\left[(\pi-t)\cdot\frac{2}{k}\sin\frac{kt}{2}\right]_{0}^{\pi}}_{0-0} + \frac{k}{2}\int_{0}^{\pi}\sin\frac{kt}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4}{k^2}\left[\cos\frac{kt}{2}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{4}{k^2}\left[\cos\frac{kt}{2}\right]_{0}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4}{k^2}\left(1-\cos k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k^2}\left(\cos k\frac{\pi}{2}-1\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}\left(2 - 2\cos k\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{k^2\pi}\left(1-\cos k\frac{\pi}{2}\right)}}$$

	0	1	2	3
$\cos\frac{k\pi}{2}$	1	0	-1	0

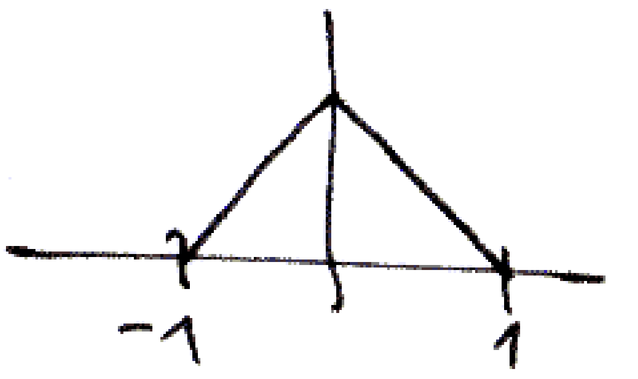
$\cancel{\cos\frac{k\pi}{2} = (-1)^{2k+1}}$

$$\underline{\underline{f(t) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi}\left(1-\cos k\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{k}{2}t}}$$

Př.

20.9.96

$$f(t) = 1 - |t|, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle$$
$$= 1 - t \quad t \in (0, 1\rangle$$
$$= 1 + t \quad t \in \langle -1, 0 \rangle$$



$T = 2 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ sudá fce $\underline{\underline{b_k = 0}}$

$$a_0 = \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt =$$

$$a_k = \int_{-1}^{0} (1+t) \cdot \cos k\pi t\,dt + \int_{0}^{1} (1-t) \cdot \cos k\pi t\,dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u' = \cos k\pi t & u = \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \\ v = 1+t & v' = 1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} u' = \cos k\pi t & u = \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \\ v = 1-t & v' = -1 \end{matrix} \right|$$

Ale $\int$ funkce je vlastně $2\int \triangle$

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 (1-t)\,dt = 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$a_k = 2 \int_0^1 (1-t) \cdot \cos(k\pi t)\,dt = 2 \underbrace{\left[(1-t) \cdot \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1}_{0} +$$

$$\cancel{0} + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \sin(k\pi t)\,dt = -\frac{2}{k^2\pi^2}\left[\cos(k\pi t)\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{-2(\cos k\pi - 1)}{k^2\pi^2}}}$$

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ sudá} \\ \frac{4}{k^2\pi^2}, & k \text{ liché!} \end{cases} \quad k = 2n+1 \Rightarrow \text{liché číslo}$$

	0	1	2	3
$\cos k\pi$	1	-1	1	-1

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos(2n+1)\pi t$$

protože je n liché

volíme tak aby $k = 1$

$k = 2n+1$

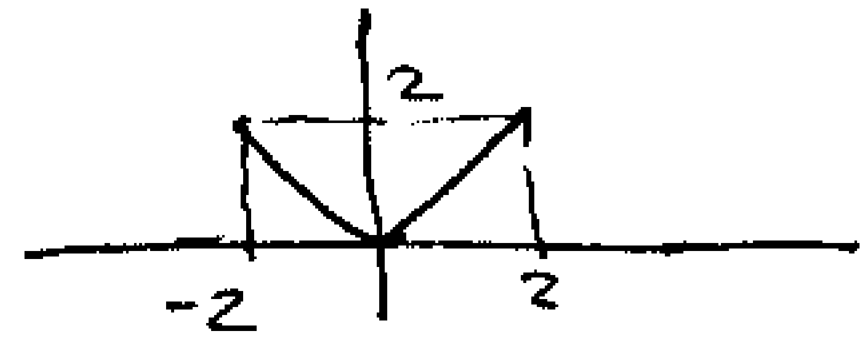
$1 = 2n+1$

$0 = 2n \Rightarrow n = 0$

PT

11.7.05

$f(t) = |t| \quad t \in \langle -2,2 \rangle$



$f(t) = -t \quad , t \in \langle -2,0)$

$f(t) = t \quad , t \in \langle 0,2 \rangle$

$T = 4 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}\pi$ sudá fce $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |t|\, dt = \frac{2}{2}\int_0^2 t\, dt = \frac{2}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |t| \cos k\frac{\pi}{2}t\, dt = \frac{1}{2}\, 2 \int_0^2 t \cos k\frac{\pi}{2}t =$$

$$\left| \begin{matrix} u' = \cos k\frac{\pi}{2}t & u = \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} \\ v = t & v' = 1 \end{matrix} \right| = \underbrace{\left[\frac{2t}{k\pi} \cdot \sin k\frac{\pi}{2}t\right]_0^2}_{0} - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin k\frac{\pi}{2}t$$

$$= -\frac{2^2}{k^2\pi^2}\left[-\cos k\frac{\pi}{2}t\right]_0^2 = \frac{4}{k^2\pi^2}\left[\cos k\frac{\pi}{2}t\right]_0^2 = \frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos k\pi - 1\right) =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right) = \cancel{\frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} - \frac{4}{k^2\pi^2}}$$

	0	1	2	3
$\cos k\pi$	1	-1	1	-1
$(-1)^k$	1	-1	1	-1

0 - k sudé

$-\frac{8}{k^2\pi^2}$, k liché $(2n+1) = k$

$1 = 2n+1$

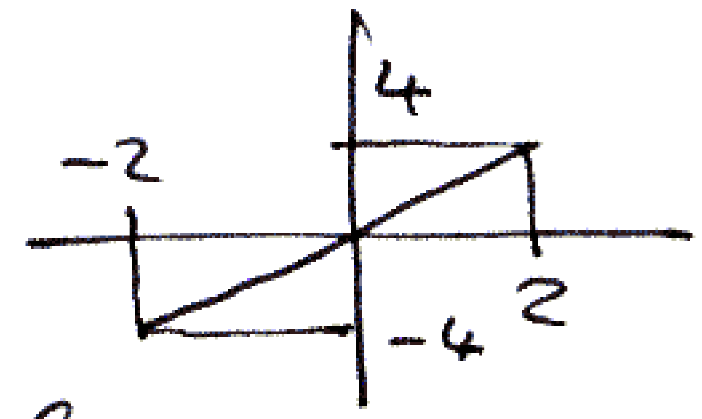
$2n = 0$

$$f(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2 (2n+1)^2} \cdot \cos (2n+1)\frac{\pi}{2}t$$

(PF)

25.11.95

$$f(t)=\frac{1}{2}t \quad , t\in(-2,2)$$



$$T=4 \qquad \omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{1}{2}\pi$$

lichá fce $a_n=0$

$$a_0=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 \frac{1}{2}t\,dt=\frac{1}{4}\left[t^2\right]_0^2=\cancel{4}\,1$$

MELZE!

střední hodnota je 0!

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}t\,dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[t^2\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{8}(4-4)=0$$

$a_n=0$

$$b_k=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}t\sin k\frac{\pi}{2}t\,dt=\left|\begin{array}{ll} u=\sin k\frac{\pi}{2}t & u'=-\dfrac{\cos k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} \\ v=t & v'=1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\left[-t\,\frac{\cos k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}}\right]_{-2}^{2}+\frac{1}{2k\pi}\int_{-2}^{2}\cos k\frac{\pi}{2}t\,dt=$$

$$-\frac{1}{2k\pi}\left(2\cos k\pi+2\cos k\pi\right)+\cancel{\frac{1}{2k\pi}\left[\frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}t}\right]_{-2}^{2}}=-\frac{2}{k\pi}\cos k\pi$$

$0+0=0$

$$=-\frac{2}{k\pi}(-1)^k$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^k}{k\pi}\cdot\sin k\frac{\pi}{2}t$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad A_k\cdot\sin(k\omega t+\varphi_k) \qquad A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$$\varphi_k=-\operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k} \quad (b_k>0)$$

$$\pi+\operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k} \quad b_k<0$$

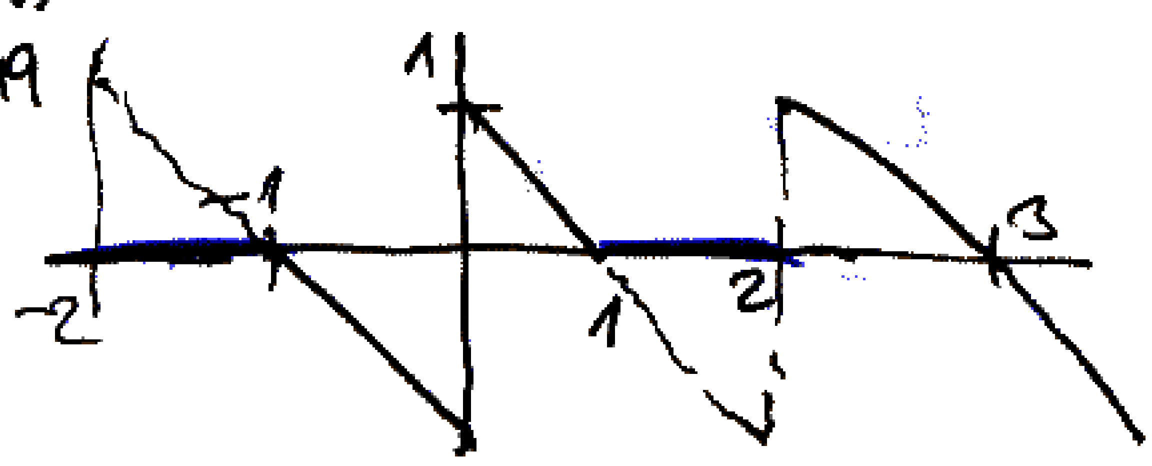
$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos k\omega t\,dt \qquad b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin k\omega t\,dt$$

$$f(t)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t$$

$$\cos a\cdot\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin a\cdot\sin b=-\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$$
$$\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

PF $f(t) = 1-t$, $t \in \langle 0,1\rangle$ rozvinte v sin. řadu

8.7.97
8.7.99



liché prodloužení $a_k = 0$

$T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$a_0 = \int_{-1}^{0} (-1-t)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt =$$

$$= \left[-t - \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1} = \underbrace{\left[0-\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{\left[1-\frac{1}{2}-(0)\right]}_{\frac{1}{2}} = 0$$

$a_k = 0$

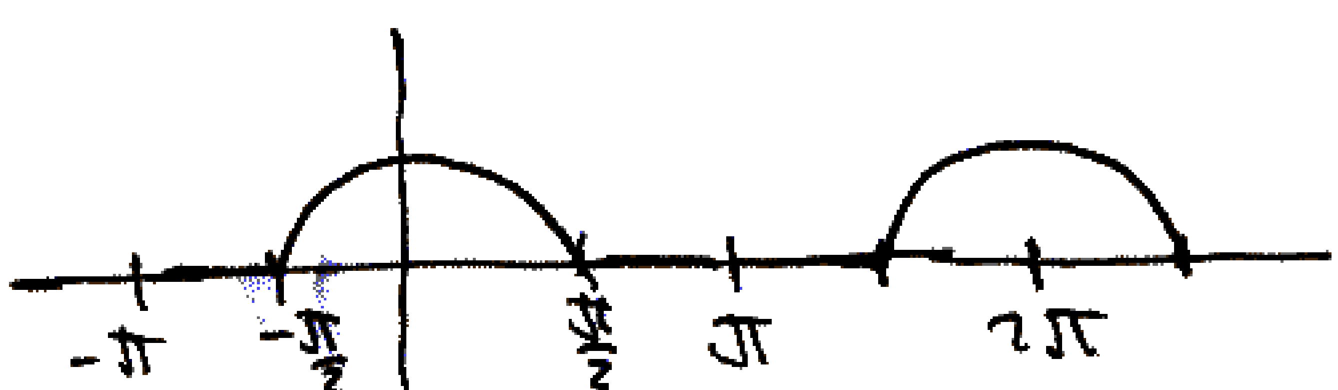
$$b_k = \int_{-1}^{0} (-1-t) \sin k\pi t\,dt + \int_{0}^{1} (1-t) \sin k\pi t\,dt = \text{RYCHLEJI} =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{1} (1-t) \sin k\pi t\,dt = 2\left[(1-t) \cdot \frac{-\cos k\pi t}{k\pi}\right]_{0}^{1} - 2\underbrace{\int_{0}^{1} \frac{\cos k\pi t}{k\pi}}_{0} =$$

$$= \frac{2}{k\pi}$$

$$f(t) = \sum \frac{2}{k\pi} \sin k\pi t$$

PF středa 1. Romaníčkem $f(t) = \max\{\cos t, 0\}$ $t \in \langle -\pi, \pi)$



$T = 2\pi$ $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

sudá fce $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \frac{1}{\pi} [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t$$

$\to a_1 =$

př

19.4.97

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} \cos kt + \frac{(-1)^k}{k^2+1} \sin kt \right)$$

lineárně 3 harmonickou fce F, Aj a_3, b_3 je-li

$$F(t) = \int_0^t f(z)\,dz \qquad \underline{\omega = 1} \qquad \underline{T = 2\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t \, dt$$

$$\underline{a_k = \frac{2}{k^2}} \qquad \underline{b_k = \frac{(-1)^k}{k^2+1}}$$

$$\int_0^t f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{2}{k^2} \cos kt + \int_0^t \frac{(-1)^k}{k^2+1} \sin kt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} \left[\frac{\sin kt}{k} \right]_0^t + \frac{(-1)^k}{k^2+1} (-1)^1 \left[\frac{\cos kt}{k} \right]_0^t =$$

$$= \sum_1^{\infty} \underbrace{\frac{2}{k^3}}_{b_k} \left[\sin kt \right]_0^t + \underbrace{\frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2+1)}}_{a_k} \left[\cos kt \right]_0^t$$

$k=3$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 10} = \underline{\underline{\frac{1}{30}}} = \sum_1^{\infty} \frac{2}{k^3} (\sin kt) + \frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2+1)} (\cos kt - 1)$$

$$\underline{\underline{b_3 = \frac{2}{27}}}$$

27.11.99 Pro $x \in (-\pi, \pi\rangle$ platí

(Př)

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cos nx$$

Four. rozvoj fce $x \cdot \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$?

$$\sin x + x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cdot \sin nx \cdot n$$

$$x \cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2n \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cdot \sin nx$$

$$|a_n|, |b_n| \leq 10^{-2}$$

$$\frac{2n}{n^2-1} \leq 10^{-2} \qquad 0 \leq 10^{-2} n^2 - 2n - 10^{2}$$

(Př) Pro f platí, určete 2. harmonickou fce f' a její A_{φ},

17.4.99

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k^3} \cos(k\pi t) - \frac{4}{k^4+1} \sin(k\pi t) \right)$$

$$\omega = \pi = \frac{2\pi}{T}$$
$$T = 2$$

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\underbrace{-\frac{3}{k^4 \pi}}_{b_k} \sin(k\pi t) \underbrace{-\frac{4}{k\pi(k^4+1)}}_{a_k} \cos(k\pi t) \Bigg)$$

$$a_k = -\frac{4}{k\pi(k^4+1)} \qquad b_k = -\frac{3}{k^4 \pi}$$

$$a_3 = -\frac{4}{3\pi \cdot 82} = \frac{-2}{123\pi} \qquad b_3 = -\frac{3}{81\pi} = -\frac{1}{27\pi}$$

$$A_k = \sqrt{\left(\frac{2}{123\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{27\pi}\right)^2}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}$, $b_k > 0$

$\pi + \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}$, $b_k < 0$

(PF) Vypočtěte Four. řadu fce $f(x) = \cos ax$, $x \in (-\pi, \pi)$

16.9.99 a necelé a pomocí ní sečtěte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2}$$

$T = 2\pi \quad \omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin ax}{a} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

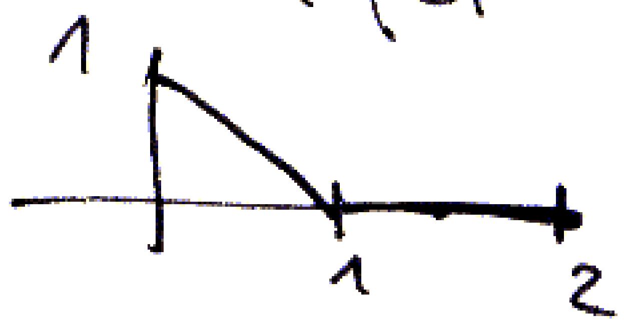
$$= \frac{1}{\pi a} (\sin a\pi - \sin -a\pi) = \frac{2}{\pi a} \sin a\pi$$

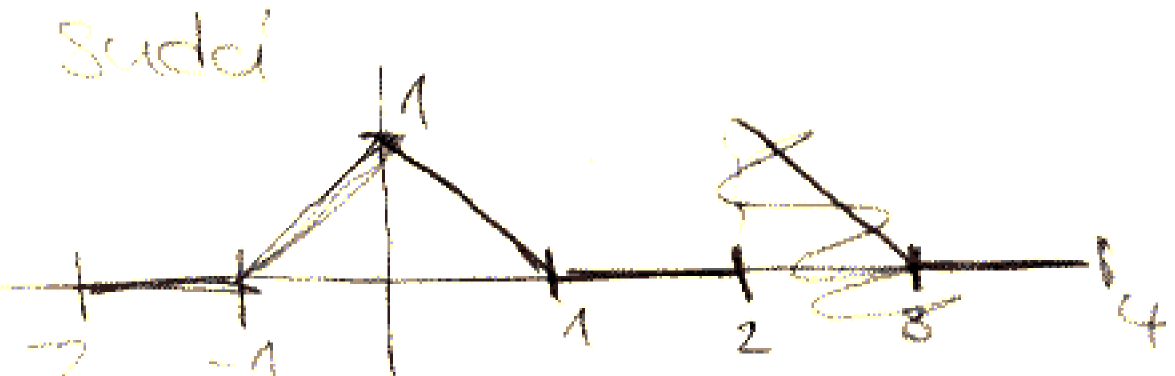
Př.

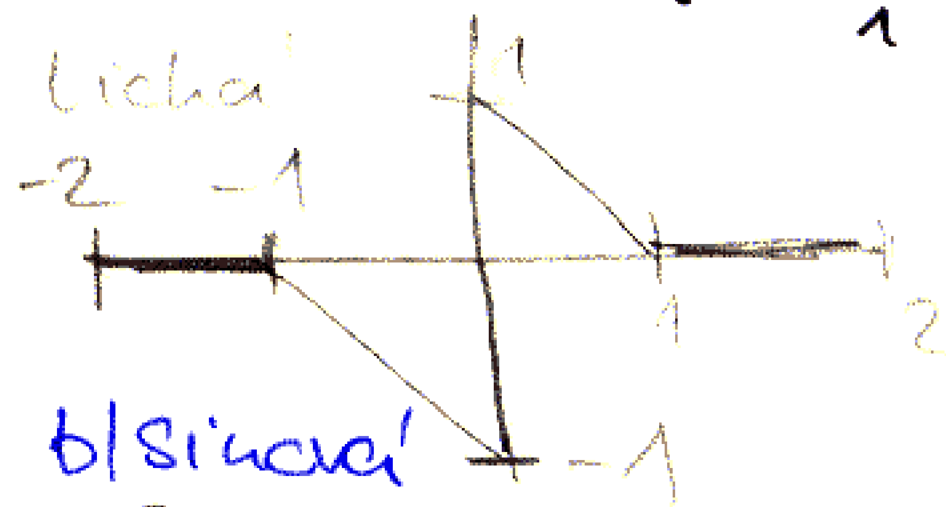
18.4.98
7.7.98

Rozvinte v sinovou, kosinovou řadu fci

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & , t \in (0,1\rangle \\ 0 & , t \in \langle 1,2 \rangle \end{cases}$$







a) kosinová

$f(t) = 1+t \quad , t \in (-1,0)$

$f(t) = 1-t \quad , t \in (0,1)$

b) sinová

$f(t) = -1-t \quad , t \in (-1,0)$

$f(t) = 1-t \quad , t \in (0,1)$

ad a) $T = 4 \; , \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ ad b) $T = 4 , \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

ad a) $a_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$b_k = 0$

$$a_k = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2} \int_0^1 (1-t) \cdot \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt = \left| \begin{matrix} u' = \cos k\frac{\pi}{2}t & u = \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} \\ v = 1-t & v' = -1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{\left[(1-t) \cdot \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} \right]_0^1}_{0} + \int_0^1 \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}}\,dt = -\frac{1}{\frac{k^2\pi^2}{4}} \left[+ \cos k\frac{\pi}{2}t \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos k\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \cancel{0 \text{ k sudé}}$$

	0	1	2	3	4
$\cos\frac{\pi}{2}k$	1	0	-1	0	1

$$f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos k\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

ad b) $a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{4} \int_{-1}^{0} (-1-t) \cdot \sin k\frac{\pi}{2}t + \frac{2}{4}\int_0^1 (1-t) \cdot \sin k\frac{\pi}{2}t =$$

$$\left| \begin{matrix} u' = \sin k\frac{\pi}{2}t & u = -\cos k\frac{\pi}{2}t \\ v = -1-t & v' = -1 \end{matrix} \right| \quad \left| \begin{matrix} u' = \sin k\frac{\pi}{2}t & u = -\cos k\frac{\pi}{2}t \\ v = 1-t & v' = -1 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-1-t) \cdot -\cos k\frac{\pi}{2}t \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[(1-t) \cdot -\cos k\frac{\pi}{2}t \right]_0^1$$

$1 + 2\cos k\frac{\pi}{2}$ $\quad 0-(-1)$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \cos k\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos k\frac{\pi}{2}t = -\frac{1}{\cancel{2}k\frac{\pi}{\cancel{2}}}\left[\sin k\frac{\pi}{2}t \right]_{-1}^{0} - \frac{1}{\cancel{2}k\frac{\pi}{\cancel{2}}}\left[\sin k\frac{\pi}{2}t \right]_0^1$$

$0 + \sin k\frac{\pi}{2}$ $\quad \sin k\frac{\pi}{2} - 0$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 2\cos k\frac{\pi}{2} + 1 \right] - \frac{1}{k\pi}\left[2\sin k\frac{\pi}{2} \right] \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

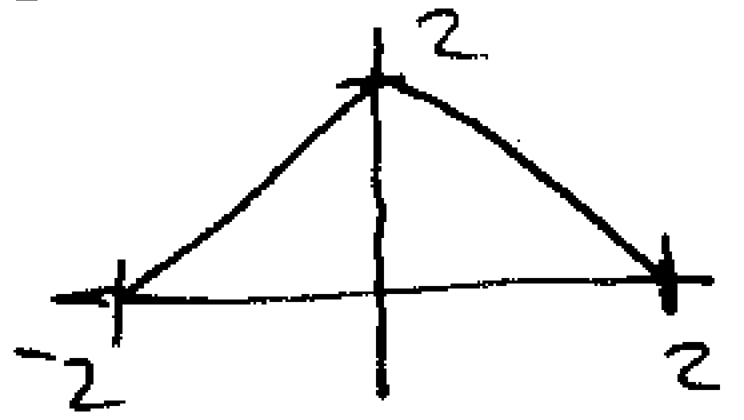
$$b_k = 1 - \cos k\frac{\pi}{2} - \frac{2}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin k\frac{\pi}{2}t$$

Př. $f(t) = 2 - t \quad , t \in (0,2\rangle$ v <u>kos.</u> four. ř. $\Rightarrow b_k = 0$

15.4.2000

načrtnout graf součtu na $\langle -4,4 \rangle$



$T = 4 \quad \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{2}{4}\cdot 2\int_0^2 (2-t)\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 4 - 2 - (0) = \underline{\underline{2}}$$

$$a_k = \frac{2}{4}\cdot 2\int_0^2 (2-t)\cdot\cos k\frac{\pi}{2}t\,dt = \left| \begin{matrix} u' = \cos k\frac{\pi}{2}t & u = \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} \\ v = (2-t) & v' = -1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{\left[(2-t)\cdot\frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}}\right]_0^2}_{0-0} + \frac{1}{k\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \sin k\frac{\pi}{2}t = \frac{1}{k^2\frac{\pi^2}{4}}\left[\cos k\frac{\pi}{2}t\right]_0^2 =$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos k\pi - 1\right) = \frac{4(-1)^k - 4}{k^2\pi^2}$$

0 k sudé

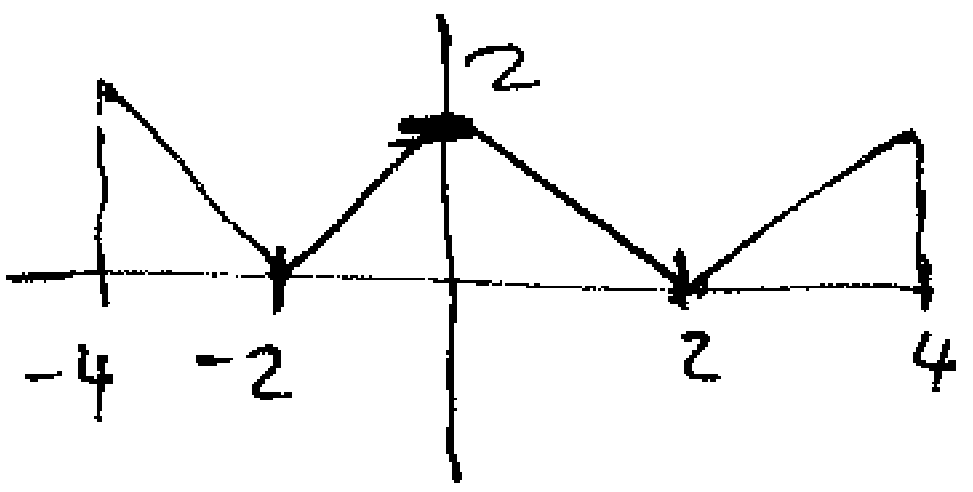
$-\frac{8}{k^2\pi^2}$ k liché

$2n+1 = k$

$$f(t) = \frac{2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cdot\cos k\frac{\pi}{2}t$$

$2n+1 = 1$

$n = 0$



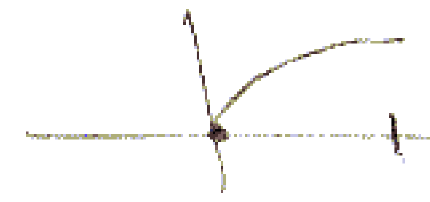
(pv)

17.9.98

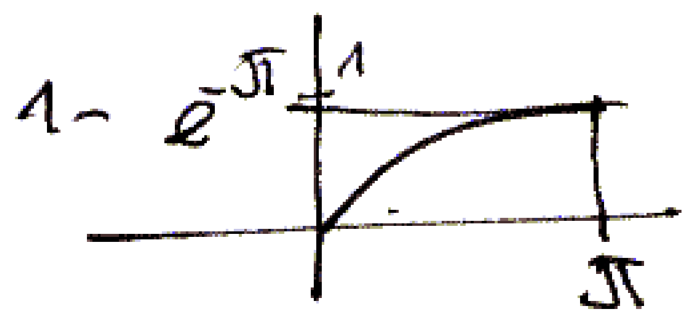
Kompl. tvar. Four. řady fce

$e^{0} = 1 \qquad 1 - e^{0} = 0$

$e^{-\pi} = 0{,}04 \qquad 1 - 0{,}04 = 0{,}95$



$$f(t) = 1 - e^{-t} \qquad t \in \langle 0, \pi \rangle$$



$$c_k = \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{+jk\omega t}\, dt$$

$$T = \pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - e^{-t}) \cdot e^{-jk2t}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-j2kt}\, dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t(1+j2k)}\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-j2kt}}{-j2k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-t(1+j2k)}}{-1-j2k} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-j2k\pi}}{-j2k} - \frac{1}{-j2k} \right] - \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-\pi(1+j2k)}}{-(1+j2k)} - \frac{1}{-(1+j2k)} \right] =$$

$$= \frac{1 - e^{-j2k\pi}}{jk\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{-\pi(1+j2k)}}{1+j2k} =$$

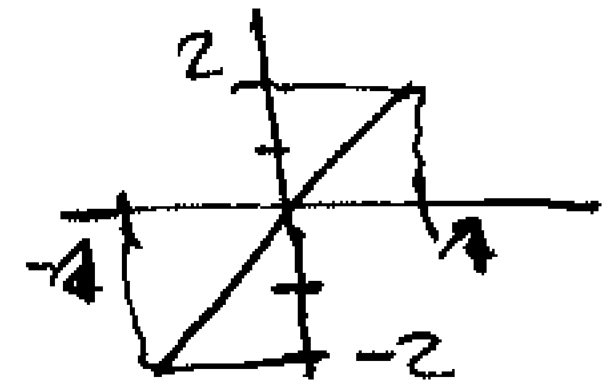
$$= \frac{1 - e^{-j2k\pi}}{jk\pi} - \frac{2 - 2e^{-\pi} \cdot e^{-j2k}}{\pi + j2k\pi} = \frac{(1 - e^{-j2k\pi}) \cdot (\pi + j2k\pi) - [2 - 2e^{-\pi} \cdot e^{-j2k}] \cdot jk\pi}{jk\pi(\pi + j2k\pi)}$$

$$= \pi + j2k\pi - \pi e^{-j2k\pi}$$

(13)

22.11.97

$f = 2t \quad , t \in \langle -1, 1 \rangle$



$T = 2 \; , \; \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} 2t \, dt = \left[t^2 \right]_{-1}^{1} = 1 - 1 = 0$

$a_k = 0$ – sinový rozvoj

$b_k = \int_{-1}^{1} 2t \sin k\pi t \, dt = \left| \begin{matrix} u' = \sin k\pi t & u = -\frac{\cos k\pi t}{k\pi} \\ v = 2t & v' = 2 \end{matrix} \right| =$

$= \left[-\frac{2t}{k\pi} \cos k\pi t \right]_{-1}^{1} + \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_{-1}^{1} \cos k\pi t \, dt}_{0} = -\frac{2t}{k\pi} \left(\cos k\pi + \cos k\pi \right) =$

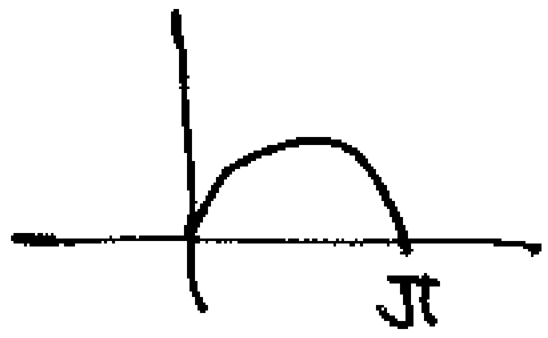
$\cos k\pi$	0	1	2	3
	1	-1	1	-1

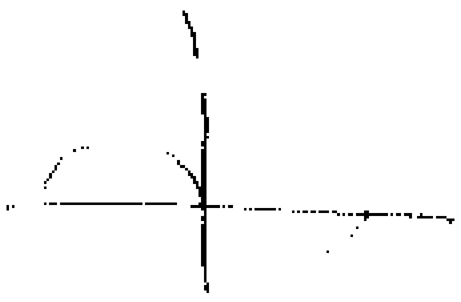
$= -\frac{4t}{k\pi} \cdot \cos k\pi = \underline{\underline{-\frac{4t}{k\pi} \cdot (-1)^k}}$

$\frac{4}{k\pi} < 10^{-2} \Rightarrow \frac{4}{10^{-2}\pi} < k \quad \underline{\underline{k > 128}}$

pr

$$f(t) = \sin t \begin{cases} t \in (0,\pi) \\ 0 \text{ jinde} \end{cases}$$





$$f(t) = \sin t\,[1(t) - 1(t-\pi)] = \sin t \cdot 1(t) - \sin t\, 1(t-\pi)$$

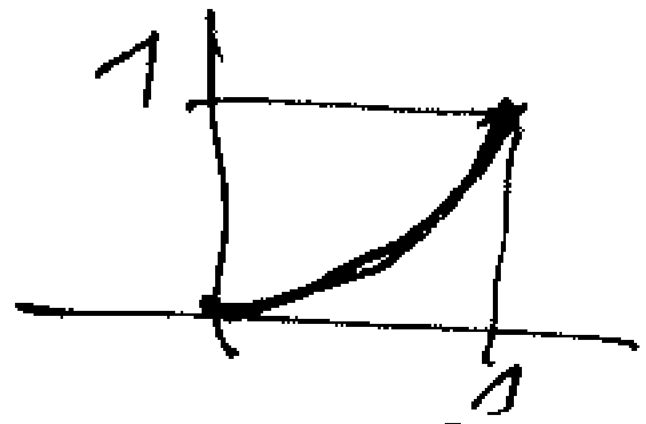
$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} - e^{-\pi p} \cdot \mathcal{L}\{\sin(t+\pi)\} =$$

$$= \frac{1}{p^2+1} - e^{-\pi p} \cdot \mathcal{L}\{-\sin t\} = \underline{\underline{\frac{1}{p^2+1} + e^{-\pi p} \cdot \frac{1}{p^2+1}}}$$

---

pr

$$f(t) = t^2 \begin{cases} t \in (0,1\rangle \\ 0 \text{ jinde} \end{cases}$$



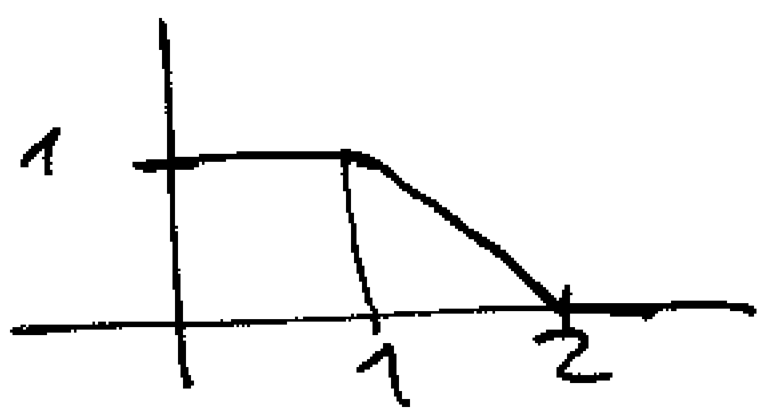
$$f(t) = t^2\,[1(t) - 1(t-1)] = t^2 \cdot 1(t) - t^2\, 1(t-1) =$$

$$= \frac{2}{p^3} - e^{-p} \cdot \mathcal{L}\{\underbrace{(t+1)^2}_{t^2+2t+1}\} = \underline{\underline{\frac{2}{p^3} - e^{-p}\left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}\right)}}$$

---

pr

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1\rangle \\ 2-t & t \in (1,2\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



$$f(t) = 1(t) - 1(t-1) + (2-t)\,[1(t-1) - 1(t-2)] =$$

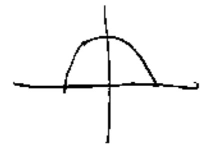
$$= 1(t) - 1(t-1) + 2 \cdot 1(t-1) - 2 \cdot 1(t-2) - t\, 1(t-1) + t\, 1(t-2)$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - e^{-p} \cdot \frac{1}{p} + e^{-p} \cdot \frac{2}{p} - e^{-2p} \cdot \frac{2}{p} - e^{-p} \cdot \mathcal{L}\{(t+1)\} + e^{-2p}\,\mathcal{L}\{(t+2)\}$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \cancel{e^{-p} \cdot \frac{1}{p}} + \cancel{e^{-p} \cdot \frac{2}{p}} - \cancel{e^{-2p} \cdot \frac{2}{p}} - e^{-p}\left(\frac{1}{p^2} + \cancel{\frac{1}{p}}\right) + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \cancel{\frac{2}{p}}\right)$$

$$\underline{\underline{F(p) = \frac{1}{p} - e^{-p} \cdot \frac{1}{p^2} + e^{-2p} \cdot \frac{1}{p^2}}}$$

① f je sudá $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$



cos – je sudá (cos(t) = cos(-t))

$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$

obsahuje pouze a_k – cos členy

$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos k\omega t\,dt$, $b_k = 0!$ $\Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t$

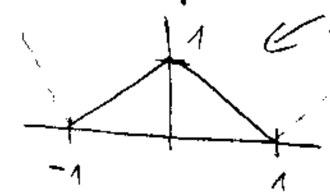
po počítání ∫ f re lichá ... !

② f je lichá

$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t\,dt$, $a_k = 0!$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t$

obsahuje pouze sin členy

(př) Ve Four. řadu rozvinte funkci



sudá, $T = 2$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow b_k = 0$ $\quad f(t) = 1 - t,\ t \in (0,1)$

$f(t) = t + 1,\ t \in (-1, 0)$

$a_0 = 2\cdot\frac{2}{2}\int_0^1 (1-t)\,dt = 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$

$a_k = 2\int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{u}\cdot\underbrace{\cos(k\pi t)}_{v'}\,dt = \underbrace{2\left[\underbrace{(1-t)}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}}_{v}\right]_0^1}_{0} +$

$+ \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi t)\,dt = -\frac{2}{k^2\pi^2}\left[\cos(k\pi t)\right]_0^1 = \frac{-2(\cos(k\pi) - 1)}{k^2\pi^2}$

$a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ - sudá} \\ \frac{4}{k^2\pi^2}, & k \text{ - liché},\ k = 2n+1 \end{cases}$ → liché číslo

Je-li fce spojitá, pak je součet své Fourierovy řady a rovnice platí =

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi t$

určíme n tak aby k bylo 1 ⇒ k = 2n+1 ⇒ n = 0

protože je liché

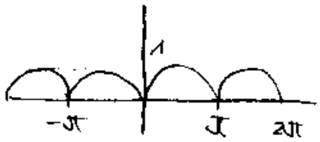
$\underline{t=0:}$

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \leftarrow \text{součet lichých členů tady je } \frac{\pi^2}{8}$$

(TF) Ve Fourierovu řadu rozviňte fci

$f(t) = |\sin t| \qquad t \in (0, \pi)$



$\to$ fce je sudá $T=\pi,\ \omega=2,\ b_k=0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \, dt = -\frac{2}{\pi}\left[\cos t\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}(-2) = \frac{4}{\pi}$$

a_0 určuje kam se funkce vystředí, proto pokud leží nad osou, musí být $a_0 > 0$

součtové vzorce

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos k2t \, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t$$

liché vždy $\Rightarrow -1$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2k+1)t}{2k+1} - \frac{-\cos(2k-1)t}{2k-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+1}{2k+1} - \frac{1+1}{2k-1}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{-2}{4k^2-1} = \frac{-4}{\pi(4k^2-1)}$$

✓fce je spojitá

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(4k^2-1)} \cdot \cos k2t$$

$t=0:$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

$t = \frac{\pi}{2}:$

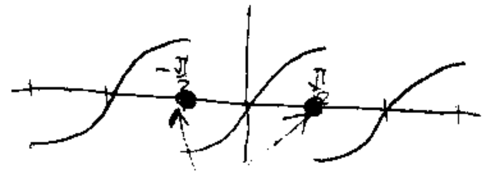
$$1 = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(4k^2-1)\pi} \qquad \cos 2k\frac{\pi}{2} = \cos k\pi = (-1)^k$$

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k^2-1)}$$

Př. ve Fourierovu řadu rozviňte periodické prodloužení fce

$f(t) = \sin t \quad , t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$T = \pi \; , \omega = 2 \; ,$ lichá



kdybychom to z def. můžeme psát $f(t) =$

$$a_k = 0$$

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin 2kt \, dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2k+1)t - \cos(2k-1)t \right) dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} - \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^k}{2k-1} \right) =$$

$$= \frac{-2(-1)^k \cdot 4k}{\pi(4k^2-1)} = \frac{8k \cdot (-1)^{k+1}}{\pi \cdot (4k^2-1)}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k \cdot (-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cdot \sin 2kt$$

$t = \frac{\pi}{4}$ $\quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ původní fce

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin k\frac{\pi}{2}$$

$k = 2n+1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(2n+1) \cdot (-1)^n}{\pi(4(2n+1)^2-1)}$$

$$-\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \sum$$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

Př. Přepište ve Fourierovu řadu násl. funkci:

1. $\sin^2 t$
2. $\sin 2t \cos 3t$
3. $\cos^3 t$

---

ad 1. $\sin^2 t \quad T = 2\pi,\ \omega = 1$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\, dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{1}}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos kt}_{\text{(integrál přes periodu) } 0} - \cos kt \cdot \cos 2t \, dt$$

$\sin kt \leftarrow b$

$\cos kt \cdot \cos 2t = \frac{1}{2}(\cos(k+2)t + \cos(k-2)t)$

$\cos(k+2)t + \cos(k-2)t$

sin ... sin

$b_k = 0$

$a_k = 0 \ ; k \neq 2$

ale tohle stejně nemá smysl protože tak se k výsledku nedobereme musíme rozložit

$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(-2\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sin^2 t = \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2}\cos 2t}$$

$\Rightarrow$ všechny ostatní jsou nulové

ad 2. $T = 2\pi,\ \omega = 1$

$$\sin 2t \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}\left(\sin(3+2)t - \sin(3-2)t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 5t - \sin 1t)$$

$\Rightarrow$ Four. řada má 2 koef. b_1 a b_5

$$\underline{\underline{b_1 = -\frac{1}{2}}},\ \underline{\underline{b_5 = +\frac{1}{2}}}$$

všechny ostatní je nulové!

ad 3. $\cos^3 t = \cos t \cdot \cos^2 t = \cos t \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2t) =$

$$= \frac{1}{2}[\cos t + \cos t \cdot \cos 2t] = \cancel{\frac{1}{2}[\cos t + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[\cos t + \frac{1}{2}(\cos \underbrace{(2+1)}_{3} t + \cos \underbrace{(2-1)}_{1} t]$$

$$= \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t$$

$$\underline{\underline{a_1 = \frac{3}{4}}} \quad \underline{\underline{a_3 = \frac{1}{4}}}$$

(PF) nahraďte $f(t)$ ve Fourierovou řadu POUZE NA INTERVALU!

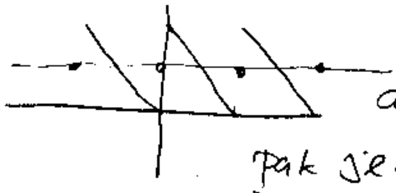
$f(t) = 1 - t \;,\; t \in \langle 0, 1)$

a) ve F. řadu
b) kosinovou
b) sinovou

$T = 1 \quad \omega = 2\pi$

ad a)

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-t)\,dt = 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$



a_0

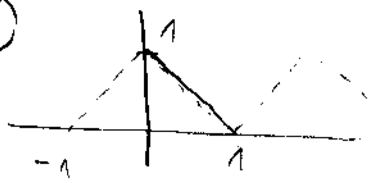
pak je fce lichá $\Rightarrow a_k = 0$ nemusíme počítat

$$b_k = 2\int_0^1 (1-t)\sin 2\pi k t\,dt = \cancel{2[(1-t)}$$

$$= 2\left[(1-t)\frac{-\cos(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_0^1 + 0 = \frac{1}{\pi k}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k}\sin 2\pi k t \;,\quad f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$$

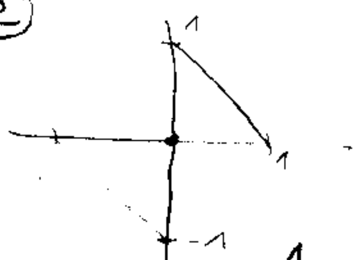
ad b)



$T = 2$
$\omega = \pi$ – sudá

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)}\cos(2n+1)\pi t \;,\quad f(0) = 1,\; f(1) = 0$$

ad c)



$T = 2$
$\omega = \pi$ – lichá

$$b_k = 2\cdot\frac{2}{2}\int_0^1 (1-t)\cdot\sin k\pi t\,dt = 2\left[(1-t)\frac{-\cos k\pi t}{k\pi}\right]_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 \frac{\cos k\pi t}{k\pi}}_{0} =$$

$$= \frac{+2}{k\pi}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin k\pi t \;;\quad f(0) = 0;\; f(1) = 0$$

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t =$$

$$= A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$a_k = A_k \cdot \sin\varphi_k \qquad b_k = A_k \cos\varphi_k$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{a_k}{b_k}, & b_k > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{a_k}{b_k}, & b_k < 0 \end{cases}$$

Příklady ① $f(t)=e^{-t},\ 0\le t<1,\ T=1,\ \omega=2\pi$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-jk\omega t}\,dt$$

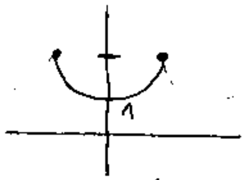
$$c_k=\int_0^1 e^{-t}\cdot e^{-j2k\pi t}\,dt=$$

$$=\int_0^1 e^{-t(1+j2k\pi)}\,dt=\left[\frac{e^{-t(1+2jk\pi)}}{-(1+2jk\pi)}\right]_0^1=\frac{1-e^{-(1+2jk\pi)}}{1+2jk\pi}=$$

$$=\frac{1-e^{-1}}{1+2jk\pi}=\frac{(1-e^{-1})\cdot(1-j2k\pi)}{1+4k^2\pi^2}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(1-e^{-1})\cdot(1-j2k\pi)}{1+4k^2\pi^2}\,e^{jk2\pi t}$$

② $f(t)=\cosh t,\ t\in\langle -1,1)$



$T=2$
$\omega=\pi$

$$c_k=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\cdot e^{-jk\pi t}=\frac{1}{4}\int_0^1\left[e^{t(1-jk\pi)}+e^{-t(1+jk\pi)}\right]dt=$$

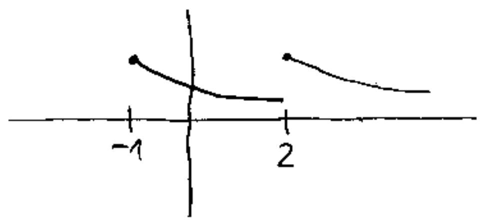
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{t(1-jk\pi)}}{1-jk\pi}-\frac{e^{-t(1+jk\pi)}}{1+jk\pi}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\left(\frac{e(-1)^k-e^{-1}(-1)^k}{1-jk\pi}\right.$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{e(-1)^k-e^{-1}(-1)^k}{1-jk\pi}-\frac{(e^{-1}-e)\cdot(-1)^k}{1+jk\pi}\right)=$$

$$=\frac{(e-e^{-1})\cdot(-1)^k}{4}\cdot\left(\frac{1}{1-jk\pi}+\frac{1}{1+jk\pi}\right)=\frac{(e-e^{-1})\cdot(-1)^k\cdot 2}{4(1+k^2\pi^2)}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(e-e^{-1})\cdot(-1)^k}{2(1+k^2\pi^2)}\cdot e^{jk\pi t}$$

(PF) $f(t) = e^{-t}$, $t \in \langle -1, 2)$ rozviňte v Fourie. řadu v komp. tvaru



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{+jk\omega t}$$ ← výsl. řada s $+jk\omega t$

nebo znaménka mohou být opačné

$$c_k = \int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt$$ ← koeficient s $-j$

$T = 3 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{3}\pi$

$$c_k = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} e^{-t} \cdot e^{-jk\frac{2}{3}\pi t}\, dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{3} e^{-t(1+jk\frac{2}{3}\pi)}\, dt$$

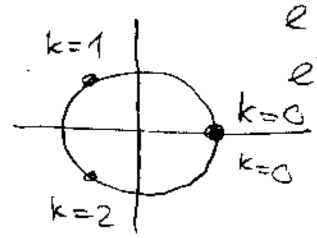
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-t(1+jk\frac{2}{3}\pi)}}{1+jk\frac{2}{3}\pi}\right]_{-1}^{3} = \frac{e^{1+jk\frac{2}{3}\pi} - e^{-2-jk\frac{4}{3}\pi}}{3+jk2\pi} =$$

$$= \frac{(3-jk\cdot 2\pi)\cdot(e-e^{-2})\, e^{j\frac{2k\pi}{3}}}{9+k^2 4\pi^2}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(3-jk2\pi)\cdot(e-e^{-2})\cdot e^{j\frac{2k\pi}{3}}}{9+k^2 4\pi^2}\, e^{jk\frac{2}{3}\pi t}$$

$e^{j\frac{2k}{3}\pi}$

$e^{-j\frac{4}{3}k\pi}$



tyto jsou stejná čísla

$k = 3n$

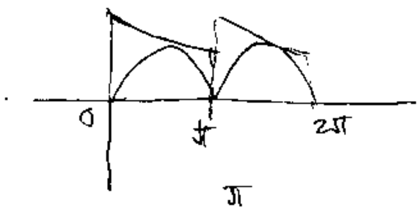
1

$k = 3n+1$

$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 3n+2 \approx 3n-1$

(př) $f(t) = e^{-t} \cdot \sin t \quad , t \in (0, \pi)$ rozviňte ve Four. řadu v kompl. tvaru.



$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t \cdot e^{-jk2t} \, dt = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\pi} \left(e^{t(-1+j-2jk)} - e^{-t(1+j+2jk)} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{e^{t(-1+j(1-2k))}}{-1+j(1-2k)} + \frac{+e^{-t(1+j(1+2k))}}{1+j(1+2k)} \right]_0^{\pi} =$$

$e^{t} \, e^{-jt(1 \mp 2k)}$

$e^{j2k\pi}$ -1

$e^{j(2k-1)\pi} = -1$

$$= \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{-e^{-\pi} - 1}{-1+j(1-2k)} + \frac{-e^{-\pi} - 1}{1+j(1+2k)} \right] = \cancel{j \left(\frac{e^{\pi}+1}{2\pi} \right) \frac{}{-1-j(1+2k)}}$$

$$= j \left(\frac{e^{\pi}+1}{2\pi} \right) \frac{2j}{-1-j(1+2k)+j(1-2k)-(1-4k^2)} =$$

$$= -\frac{e^{\pi}+1}{\pi} \cdot \frac{1}{\underset{(2k^2-1)-j2k}{4k^2-2-4jk}} = -\frac{e^{\pi}+1}{2\pi} \cdot \frac{2k^2-1+2jk}{(2k^2-1)^2+4k^2} =$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{e^{\pi}+1}{2\pi} \cdot \frac{2k^2+2jk-1}{4k^4+1} \cdot e^{jk2t}$$

Komplexní funkce

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\log z = \ln|z| + j \arg z$$

PŘ

209.96 $\cos \frac{2\pi z}{z-1} = 2$

$$\frac{2\pi z}{z-1} = p$$

$$2\pi z = pz - p$$

$$z(2\pi - p) = -p$$

$$z = -\frac{p}{2\pi - p}$$

$$\frac{e^{jp} + e^{-jp}}{2} = 2$$

$$e^{jp} + e^{-jp} = 4 \quad / e^{jp}$$

$$e^{2jp} - 4e^{jp} + 1 = 0$$

$$\underline{e^{jp} = y}$$

$$y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{jp} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$jp = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3})$$

$$jp = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + j(0 + 2k\pi) = \cancel{2k\pi}$$

$$p = 2k\pi - j\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$z = \frac{-2k\pi + j\ln(2 \pm \sqrt{3})}{2\pi - (2k\pi - j\ln(2 \pm \sqrt{3}))}$$

(PZ)

9.7.A6

$$\sin z - \cos z = j$$

$$\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} - \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} = j \quad / 2j$$

$$e^{jz}-e^{-jz}-j\left(e^{jz}+e^{-jz}\right) = -2$$

$$e^{jz}(1-j) - e^{-jz}(1+j) = -2 \quad / e^{jz}$$

$$e^{2jz}(1-j) - (1+j) + 2e^{jz} = 0 \qquad e^{jz} = y$$

$$(1-j)y^2 + 2y - (1+j) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1-j)\cdot(-1-j)}}{2(1-j)} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2(1-j)} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2(1-j)} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{1-j}$$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{1-j}\cdot\frac{1+j}{1+j} = \frac{(-1+\sqrt{3})\cdot(1+j)}{2} = \underline{\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$$

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{1-j}\cdot\frac{1+j}{1+j} = \underline{\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}} = -1{,}36 - j\,1{,}36$$

$$e^{jz_1} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$jz_1 = \operatorname{Log}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$jz_1 = \ln 0{,}51 + j\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\underline{z_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - j\ln 0{,}51}$$

$$e^{jz_2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$jz_2 = \operatorname{Log}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$jz_2 = \ln 0{,}51 + j\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\underline{z_2 = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi - j\ln 0{,}51}$$

PF
117.95

$$\operatorname{tg} 2\pi z = \frac{5}{3} j \qquad p = 2\pi z \Rightarrow z = \frac{p}{2\pi}$$

$$\frac{\sin 2\pi z}{\cos 2\pi z} = \frac{5}{3} j$$

$$\frac{\frac{e^{jp} - e^{-jp}}{\cancel{2}j}}{\frac{e^{jp} + e^{-jp}}{\cancel{2}}} = \frac{5}{3} j \qquad \frac{e^{jp} - e^{-jp}}{e^{jp} + e^{-jp}} = -\frac{5}{3}$$

$$e^{jp} - e^{-jp} = -\frac{5}{3}(e^{jp} + e^{-jp}) \quad / \cdot e^{jp}$$

$$e^{2jp} - 1 = -\frac{5}{3} e^{2jp} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{8}{3} e^{2jp} + \frac{2}{3} = 0 \longrightarrow e^{2jp} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2jp = \operatorname{Log}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$2jp = \ln \frac{1}{4} + j(\pi + 2k\pi)$$

$$p = -j\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$z = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - j\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}}{2\pi}$$

PF
20.4.96

$$\sin \frac{z}{1-z} = j \qquad \frac{z}{1-z} = p \Rightarrow z = p - pz$$

$$z(1+p) = p \Rightarrow z = \frac{p}{1+p}$$

$$\sin p = j$$

$$\frac{e^{jp} - e^{-jp}}{2j} = j \qquad e^{jp} = y$$

$$e^{jp} - e^{-jp} = -2 \quad / e^{jp} \qquad y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$e^{2jp} + 2e^{jp} - 1 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$e^{jp} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$jp = \operatorname{Log}(-1 \pm \sqrt{2})$$

$$jp_1 = \ln(-1+\sqrt{2}) + j2k\pi \qquad p_2 = (\pi + 2k\pi) - j\ln(|-1-\sqrt{2}|)$$

$$p_1 = 2k\pi - j\ln(\sqrt{2}-1)$$

$$z_1 = \frac{2k\pi - j\ln(\sqrt{2}-1)}{1 + 2k\pi - j\ln(\sqrt{2}-1)} \qquad z_2 = \frac{(\pi + 2k\pi) - j\ln(|-1-\sqrt{2}|)}{1 + \pi + 2k\pi - j\ln(|-1-\sqrt{2}|)}$$

(pr)

21.9.95

$$\cos\frac{\pi z}{z+1}=2 \qquad p=\frac{\pi z}{z+1}$$

$$pz+p=\pi z$$

$$\frac{e^{jp}+e^{-jp}}{2}=2$$

$$e^{2jp}-4e^{jp}+1=0 \qquad z=-\frac{p}{p-\pi}$$

$$e^{jp}=y \qquad y^2-4y+1=0 \qquad y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2} \begin{cases}2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$e^{jp}=2\pm\sqrt{3}$$

$$jp=\mathrm{Log}\,(2\pm\sqrt{3})$$

$$jp=\ln(2\pm\sqrt{3})+j\,2k\pi$$

$$p=2k\pi-j\ln(2\pm\sqrt{3})$$

$$z=-\frac{2k\pi-j\ln(2\pm\sqrt{3})}{2k\pi-\pi-j\ln(2\pm\sqrt{3})}$$

(pr)

8.7.97

$$\sin 3z=2\pi \qquad 3z=p \Rightarrow z=\frac{p}{3}$$

$$\frac{e^{jp}-e^{-jp}}{2j}=2\pi$$

$$e^{2jp}-4\pi j e^{jp}-1=0 \qquad e^{jp}=y \qquad y^2-4\pi j y-1=0$$

$$y=\frac{4\pi j\pm\sqrt{-16\pi^2+4}}{2}=2\pi j\pm\sqrt{1-4\pi^2}$$

$$e^{jp}=j\left(2\pi\pm\sqrt{4\pi^2-1}\right)$$

$$jp=\mathrm{Log}\left\{j\left(2\pi\pm\sqrt{4\pi^2-1}\right)\right\}$$

$$y_1=j\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2-1}\right)=j\,12{,}5$$

$$y_2=j\left(2\pi-\sqrt{4\pi^2-1}\right)=j\,0{,}08$$

$$jp_1=\ln 12{,}5+j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$p_1=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-j\ln 12{,}5$$

$$z_1=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}-j\cdot\frac{1}{3}\ln 12{,}5$$

PF

~~?~~ 15.4.200

$$\cosh\left(z + j\frac{\pi}{2}\right) + je^2 = 0$$

$$\frac{e^{z+j\frac{\pi}{2}} + e^{-z-j\frac{\pi}{2}}}{2} + je^2 = 0$$

$$e^z \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} + e^{-z} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} + 2je^2 = 0 \quad / e^z$$

$$je^{2z} + 2je^2 \cdot e^z - j = 0 \qquad e^z = y$$

$$y_{1,2} = \frac{-2je^2 \pm \sqrt{4j^2e^4 - 4j\cdot(-j)}}{2j} = \frac{-2je^2 \pm \sqrt{-4e^4 - 4}}{2j} =$$

$$y_{1,2} = -e^2 \pm \frac{j\sqrt{4(e^4-1)}}{2j} = -e^2 \pm \sqrt{(e^4-1)}$$

$$e^{z_{1,2}} = -e^2 \pm \sqrt{(e^4-1)}$$

$$z_{1,2} = \mathrm{Log}\left(-e^2 \pm \sqrt{e^4-1}\right)$$

$$z_{1,2} = \ln\left|\,e^4 \pm (e^4-1)\right| + j\arg$$

$$z_1 = \ln(2e^4-1) + j\,2k\pi$$

$$z_2 = \underbrace{\ln 1}_{0} + j\,2k\pi$$

PF

27.11.99

$$(\cos^2 z + 5)\cdot(\sin z + 3) = 0$$

$$\cos^2 z = -5 \quad \text{and} \quad \sin z = -3$$

$$\left(\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}\right)^2 = -5 \qquad \left(\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}\right) = -3$$

$$(e^{jz})^2 + 2\cancel{e^{jz}}\cdot\cancel{e^{-jz}} + (e^{-jz})^2 = -20 \qquad e^{jz} - e^{-jz} = -6j$$

$$e^{2jz} + 2 + e^{-2jz} = -20 \;/\cdot e^{2jz} \qquad e^{2jz} + 6je^{jz} - 1 = 0$$

$$e^{4jz} + 22e^{2jz} + 1 = 0 \qquad e^{jz} = y$$

$$q = e^{2jz} \qquad y^2 + 6jy - 1 = 0$$

$$q^2 + q + 1 = 0$$

PF

8.7.99

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=j \qquad e^{\frac{\pi}{4}j}=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{e^{jz+\frac{\pi}{4}j}-e^{-jz-j\frac{\pi}{4}}}{2j}-\frac{e^{jz+\frac{\pi}{4}j}+e^{-jz-\frac{\pi}{4}j}}{2}=j \qquad e^{-\frac{\pi}{4}j}=\cos-\frac{\pi}{4}+j\sin-\frac{\pi}{4}$$

$$e^{jz}\cdot e^{\frac{\pi}{4}j}-e^{-jz}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}j}-j\left(e^{jz}\cdot e^{\frac{\pi}{4}j}+e^{-jz}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}j}\right)=2j^2 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-e^{-jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-j\left(e^{jz}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+e^{-jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\right.$$

$$e^{2jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+\cancel{j\frac{\sqrt{2}}{2}}-je^{2jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\cancel{j\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-2e^{jz}$$

$$e^{2jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cancel{j\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)+e^{2jz}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{j\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\quad-\sqrt{2}+2e^{jz}=0 \qquad -\sqrt{2}+2$$

$$\sqrt{2}\cdot e^{2jz}+2e^{jz}-\sqrt{2}=0$$

$$e^{jz}=y \qquad 2\cdot2\cdot3 \qquad 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}y^2+2y-\sqrt{2}=0 \qquad y_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4+2\cdot4}}{2\sqrt{2}}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2\sqrt{2}}=$$

$$y_{1,2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$e^{jz_{1,2}}=-\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \qquad jz_1=\operatorname{Log}\left(-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$jz_2=\operatorname{Log}\left(-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vdots$$

P7

17.4.99

$$\cosh(jz+\ln 2)+j\sin(z-j\ln 2)=2j$$

$$\frac{e^{jz+\ln 2}+e^{-jz-\ln 2}}{2}+\cancel{j}\cdot\frac{e^{j(z-j\ln 2)}-e^{-j(z-j\ln 2)}}{2\cancel{j}}=2j \quad /\cdot 2$$

$$\left(\underbrace{e^{jz}\cdot e^{\ln 2}}_{2}+e^{-jz}\cdot \underbrace{e^{-\ln 2}}_{\frac{1}{2}}\right)+\underbrace{e^{jz}\cdot e^{\ln 2}}_{2}-e^{-jz}\cdot \underbrace{e^{\ln 2}}_{2}=4j$$

$$4e^{jz}-\frac{3}{2}e^{-jz}=4j$$

$$\frac{11}{2}e^{jz}=4j$$

$$e^{jz}=\frac{8j}{11} \qquad jz=\mathrm{Log}\left(\frac{8}{11}j\right)$$

$$jz=\ln\frac{8}{11}+j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$\underline{\underline{z=-j\ln\frac{8}{11}+\frac{\pi}{2}+2k\pi}}$$

P8

21.11.98

$$4\cos z+\sin z=1$$

$$2\cancel{4}\,\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{\cancel{2}}+\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}=1 \quad /\cdot 2j$$

$$4j\left(e^{jz}+e^{-jz}\right)+e^{jz}-e^{-jz}=2j \quad /\cdot e^{jz}$$

$$4j\left(e^{2jz}+1\right)+e^{2jz}-1=2je^{jz}$$

$$e^{2jz}(4j+1)-2je^{jz}-1+4j=0 \qquad e^{jz}=y$$

$$y^2(4j+1)-2jy-1+4j=0$$

$$y_{1,2}=\frac{2j\pm\sqrt{-4-4(4j+1)\cdot(-1+4j)}}{2(4j+1)}=\frac{2j\pm\sqrt{-4-4(\cancel{-4j}-16-1+\cancel{4j})}}{2(4j+1)}=$$

$$=\frac{2j\pm\sqrt{-4+17}}{2(4j+1)}=\frac{2j\pm\sqrt{13}}{2(4j+1)}\ \ldots$$

PF

12.9.98 $\operatorname{tgh} z = 1-j$

$$\frac{\sinh z}{\cosh z} = 1-j$$

$$\frac{\frac{e^{z}-e^{-z}}{\cancel{2}}}{\frac{e^{z}+e^{-z}}{\cancel{2}}} = 1-j \qquad \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} = 1-j \quad / e^{z}+e^{-z}$$

$$e^{z}-e^{-z} = (1-j)(e^{z}+e^{-z})$$

$$e^{z}-e^{-z} = e^{z}+e^{-z}-je^{z}-je^{-z} \quad / \cancel{e^{z}}$$

$$-2e^{-z}+je^{z}+je^{-z} = 0 \quad / e^{z}$$

$$-2+je^{2z}+j = 0$$

$$je^{2z}-2+j = 0$$

$$je^{2z} = 2-j \Rightarrow e^{2z} = -2j-1$$

$$2z = \operatorname{Log}(-1-2j)$$

$$2z = \ln\sqrt{5} + \ldots$$

PF

7.7.98 $\operatorname{tg} z = 1+2j$

$$\frac{\sin z}{\cos z} = 1+2j$$

$$\frac{e^{2jz}-1}{j(e^{2jz}+1)} = 1+2j \quad / \text{jmenovat.} \quad e^{2jz}-1 = (1+2j)\cdot j(e^{2jz}+1)$$

$$e^{2jz}-1 = je^{2jz}+1-2e^{2jz}+2j$$

$$e^{2jz}(1-j+2) = 1+2j+1$$

$$e^{2jz}(3-j) = 2+2j$$

$$e^{2jz} = \frac{2+2j}{3-j}$$

⋮

pr.
18.4.98

$$\sinh\left(z-\frac{3}{2}\pi j\right)-\cosh\left(z-\frac{3}{2}\pi j\right)=2j$$

$$\frac{\cancel{e^{z-\frac{3}{2}\pi j}}-e^{-z+\frac{3}{2}\pi j}}{2}-\frac{\cancel{e^{z-\frac{3}{2}\pi j}}+e^{-z+\frac{3}{2}\pi j}}{2}=2j$$

$$-2\,e^{-z}\cdot e^{\frac{3}{2}\pi j}=\cancel{4}j$$

$$e^{-z}\cdot e^{\frac{3}{2}\pi j}=-2j$$

$$e^{0}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+j\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\downarrow 1 \qquad \downarrow 0 \qquad -1$$

$$\cancel{-j}\cdot e^{-z}=\cancel{2}\cancel{j}$$

$$e^{-z}=1$$

$$-z=\mathrm{Log}\,1=\underbrace{\ln 1}_{0}+2k\pi$$

$$\underline{\underline{z=-2k\pi}}$$

(př) 25.11.95

$$e^{z^2} = j$$

$$z^2 = \operatorname{Log} j$$

$$z^2 = \ln 1 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$z = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

(př)

$$\sinh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2j} \qquad p = \frac{z}{2} \to z = 2p$$

$$\frac{e^{p} - e^{-p}}{2} = \frac{1}{2j} \qquad \sin p = \frac{1}{2j}$$

$$e^{p} = y$$

$$e^{2p} + j e^{p} - 1 = 0 \qquad y^2 + jy - 1 = 0$$

$$y = \frac{-j \pm \sqrt{-1+4}}{2} = -\frac{j}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

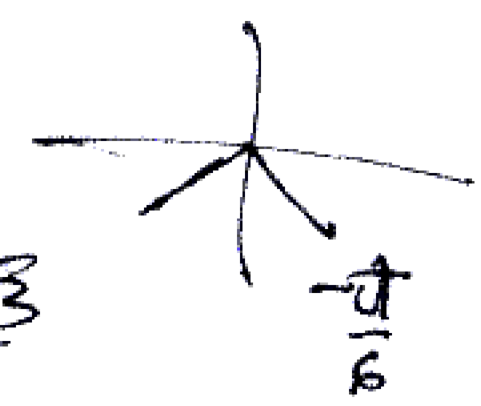
$$e^{p} = -\frac{j}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$p_1 = 0 + j\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

$$z_1 = -j\frac{\pi}{3} + 4k\pi$$

$$\operatorname{arctg} \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$p_2 = 0 + j\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

$$z_2 = j\frac{\pi}{3} + 4k\pi$$

(př)

$$\cosh\left(z + j\frac{\pi}{2}\right) + j e^{z} = 0$$

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + j \sin y)$$

$$\frac{e^{z + j\frac{\pi}{2}} + e^{-(z + j\frac{\pi}{2})}}{2} + j e^{z} = 0$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{0}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

1 0 1

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{0}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

1 0 −1

$$e^{z} \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} + e^{-z} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} + 2j e^{z} = 0$$

$$3j e^{z} - j e^{-z} = 0 \quad / \cdot e^{z}$$

$$3j e^{2z} - j = 0 \to 3j e^{2z} = j \qquad e^{2z} = \frac{1}{3} \qquad 2z = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + jk\pi$$

Holomorfní funkce

Př. Určete holomorfní funkci $f(z) = u + j v$ (a) $f(j) = 2j - 1$, je-li $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$v(x,y) = \int 2x + 2\,dy = 2xy + 2y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = 2y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \text{konst.}$$

$$f(z) = u + jv = x^2 - y^2 + 2x + j(2xy + 2y + k) =$$
$$= x^2 - y^2 + 2x + 2xyj + 2yj + kj =$$
$$= (x + jy)^2 + 2(x + jy) + jk =$$
$$= z^2 + 2z + jk$$

$$f(j) = -1 + 2j + jk = 2j - 1$$
$$jk = 0 \Rightarrow k = 0 \qquad f(z) = z^2 + 2z$$

Př. $u(x,y) = 2e^x \cdot \cos y \qquad f(0) = 2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$v(x,y) = \int 2e^x \cos y\,dy = 2e^x \cdot \sin y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \varphi'(x) = 2e^x \sin y$$
$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi = k$$

$$f(z) = u + jv = 2e^x \cos y + j(2e^x \sin y + k) =$$
$$= 2e^x(\cos y + j \sin y) + jk = 2e^x \cdot e^{jy} + jk =$$
$$= 2e^{x + jy} + jk = 2e^z + jk$$

$f(0) = 2$

$$2 = 2 + jk \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(z) = 2e^z$$

Pr.

18.9.97

$$u(x,y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - x(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = 1 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$v(x,y) = \int\left(-1 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dx = \left|\begin{array}{c} x^2+y^2=t \\ 2x\,dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \int dx = \int\left(\frac{y\,dt}{t^2}\right) - x = \left(-\frac{y}{t} - x + \varphi(y)\right) =$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} - x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \varphi = k$$

$$f(z) = u + jv = y + \frac{x}{x^2+y^2} + j\left(\frac{-y}{x^2+y^2} - x + k\right) =$$

$$= y + \frac{x}{x^2+y^2} - j\frac{y}{x^2+y^2} - jx + jk =$$

$$= (y - jx) + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - j\frac{y}{x^2+y^2}\right) + jk =$$

$$-(jx - y)$$

$$-\left(x - \frac{y}{j}\right) = -j(x+jy)$$

$$-\left(\frac{-x}{x^2+y^2} + j\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{x-jy}{(x+jy)\cdot(x-jy)} = \frac{1}{x+jy}$$

$$= -j(x+jy) + \frac{1}{x+jy} + jk = \frac{1}{z} - jz + jk$$

$$f(z) = \frac{1}{z} - j(z-k)$$

Př.

16.9.99

$$u(x,y)= x\sin x\cdot\cosh y - y\cos x\cdot\sinh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x\cosh y + x\cos x\cdot\cosh y + y\sin x\cdot\sinh y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\sin x\cdot\sinh y - \cos x\cdot\sinh y - y\cosh y\cdot\cos x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$v(x,y)=\int(\sin x\cosh y + x\cos x\cdot\cosh y + y\sin x\cdot\sinh y)\,dy$$

$$= \cancel{\sin x\cdot\sinh y} + x\cos x\cdot\sinh y + \sin x\, y\cosh y - \cancel{\sin x\sinh y} + \varphi(x)$$

$$\int y\sinh y\,dy = \left|\begin{matrix} u'=\sinh y & u=\cosh y\\ u=y & u'=1\end{matrix}\right| = y\cosh y - \int\cosh y\,dy =$$

$$= y\cosh y - \sinh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x\cdot\sinh y + \cancel{\cos x\sinh y} + x(-\sin x)\cdot\sinh y +$$

$$+ \cos x\, y\cosh y - \cancel{\cos x\sinh y} + \varphi'(x)$$

$$= -x\sin x\cdot\sinh y + \cos x\sinh y + y\cosh y\cos x$$

$$\varphi'(x)= 0 \qquad \varphi(x)= k$$

$$f(z)= x\sin x\cdot\cosh y - y\cos x\cdot\sinh y + j(x\cos x\sinh y + y\sin x\cdot\cosh y + k)$$

: 16.9.1999

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $\qquad M = \{(x,y) \mid x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}$

uvnitř M

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cancel{} = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ Stac. bod $A[0,0]$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y = 0 \Rightarrow y = 0$ $\qquad 0 = 0$

na hranici $L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x + 2\lambda = 0 \rightarrow 2x(1-\lambda) = -2\lambda$

$x = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 4\lambda y - 4\lambda = 0 \rightarrow 4y(1-\lambda) = -4\lambda$

$y = \frac{+\lambda}{1-\lambda}$

dosadíme

$x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$

$\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} - \frac{2(-\lambda)}{1-\lambda} + 2\left(\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}\right) + 4\frac{\lambda}{1-\lambda} = 0$

$3 \cdot \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} + 6\frac{\lambda}{1-\lambda} = 0 \qquad /\cdot(1-\lambda)^2$

$3\lambda^2 + 6\lambda(1-\lambda) = 0 \qquad -3\lambda^2 + 6\lambda = 0 \quad /:3$

$3\lambda^2 + 6\lambda - 6\lambda^2 = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = 0 \quad B[x_1, y_1] = [0,0] \qquad f(0,0) = 0 \Rightarrow$ min.

$\lambda_2 = 2 \quad C[2,-2] \qquad f(2,-2) = 12 \Rightarrow$ max.

(Př.) 1. $x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx.$

$x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

Fourier. rozvoj fce: $x\cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$

Derivace 1.

$$\sin x + x\cos x = \frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx \cdot n$$

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2-1}\sin nx$$

$|a_n|, |b_n| \leq 10^{-2}$

$$\frac{2n}{n^2-1} \leq 10^{-2} \qquad 0 \leq 10^{-2}n^2 - 2n - 10^{-2}$$

Fyzika

Je zákeřná protože v každé souborce je něco jiného, naštěstí jsou okruhy připadající do úvahy předneseny na konzultaci. Rozhodně tedy doporučuji konzultaci navštívit.

2. *a) Jak závisí výchylka harmonického kmitavého pohybu na čase?*
b) Určete, jaká je frekvence f netlumeného harmonického pohybu závaží na pružině. Závaží má hmotnost m = 2,5kg a bylo dodáním energie W = 0,1J uvedeno do kmitů o amplitudě U = 2cm.

<u>Řešení:</u>

a) $x = U.\sin(wt + \beta)$ 1 BOD

b) Síla působící na závaží $F = -kx$ 2 BODY
Pohybová rovnice

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -w^2x$$

$$w^2 = \frac{k}{m}$$

Řešení této rovnice: $x = U\sin(wt + \beta)$. 2 BODY
Práce síly potřebná na vychýlení závaží do max. výchylky (amplitudy U) je rovna celkové energii kmitavého pohybu.

$$A = V = -\int_0^U F dx = \frac{1}{2}kU^2 = \frac{1}{2}mw^2U^2$$ 2 BODY

$$w = \sqrt{(2V(mU^2)^{-1})}$$

$$f = w(2\pi)^{-1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(2V(mU^2)^{-1})}$$

$$f = 2{,}25s^{-1}.$$

Závaží bude kmitat s frekvencí $f = 2{,}25s^{-1}$.

CELKEM SEDM BODŮ.

1. státní zkouška

FYZIKA

8-1

Homogenním měděným drátem tvaru válce o poloměru $R = 5$ mm protéká ustálený elektrický proud o intenzitě $I = 100$ A. Určete

a) velikost a směr intenzity magnetického pole uvnitř tohoto vodiče v místě, které se nachází ve vzdálenosti $r = 2$ mm od osy vodiče,

b) hustotu energie magnetického pole v tom místě.

Měď je diamagnetikum, lze položit $\mu = \mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m.

(max. 8 bodů)

8-2

a) Popište podstatu Dopplerova jevu!

b) Hudebně nadaný pozorovatel sleduje zvuk sirény automobilu, který jej míjí konstantní rychlostí po přímé silnici, a zjišťuje, že zvuk přijíždějícího vozu se od zvuku vzdalujícího se vozu liší právě o celý tón (tzn. že poměr kmitočtů těchto dvou zvuků je roven 1,12). Určete rychlost automobilu! Rychlost zvuku je rovna $v = 340$ m/s.

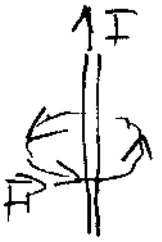
(max. 7 bodů)

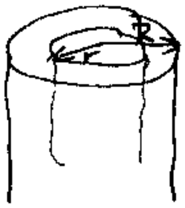
1/2 tónu $\sqrt[12]{2}$ 12 půltónů

1 tónu $\sqrt[6]{2} = 1{,}12$

8-1

a)





$R = 5\,mm$ $\quad \mu = 4\pi \cdot 10^{-7}\,H/m$

$I = 100\,A$

a) $r = 2\,mm$

$$\boxed{\oint H\,dl = I'} \qquad I = \pi R^2 \cdot j$$

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \text{ proud. hustota}$$

$$\boxed{2\pi r \cdot H = I'} \qquad I' = \pi r^2 \cdot j = I \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$H = \frac{I'}{2\pi r}$$

$$H = I \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2\pi r} = \underline{\underline{I \cdot \frac{r}{2\pi R^2}}}$$

$$H = 1273{,}2\ A/m$$

b) $\boxed{w = \frac{1}{2} H B}$ hustota energie

$$w = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = 1{,}019\ J/m^3$$

8-2 a) Rychlost šíření a rychlost pohybu zdroje se skládají

b) zdroj se přibližuje $f_1 = \frac{c}{c-v} \cdot f$

zdroj se vzdaluje $f_2 = \frac{c}{c+v} \cdot f$ $\qquad c = 340\,m/s$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{c+v}{c-v} = 1{,}12$$

$$c + v = 1{,}12(c - v)$$

$$v(1 + 1{,}12) = 0{,}12\,c$$

$$v = \frac{0{,}12}{2{,}12} \cdot c = 0{,}0566\,c$$

$$\underline{\underline{v = 19{,}24\ m/s}}$$

9. 7. 1996

První souborná zkouška - FYZIKA

1-1

Dokonale hladká koule o poloměru R = 0,6 m je připevněna na vodorovnou rovinu. Na vrcholku koule je položen hmotný bod. Tento bod je v poloze labilní rovnováhy, a po nepatrném vychýlení ze své původní polohy se začne pod vlivem gravitace pohybovat: napřed bude klouzat po povrchu koule, později její povrch opustí. Určete

a) v jaké výšce nad vodorovnou rovinou opustí hmotný bod povrch koule,
b) jaká bude přitom velikost jeho rychlosti.

Jedná se o pohyb v konstantním gravitačním poli, $g = 10\ m/s^2$. Tření a odpor prostředí zanedbejte!

(max. 8 bodů)

1-2

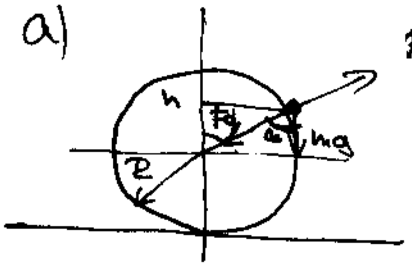
Určete vlnovou délku de Broglieovy vlny
a) elektronu urychleného potenciálovým rozdílem U = 1500 V
b) elektronu, jehož rychlost je rovna 3.10^7 m/s.

Jsou dány hodnoty fyzikálních konstant: $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, $e = 1{,}6.10^{-19}$ As, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

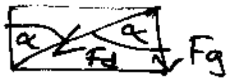
(max. 7 bodů)

1-1 $R = 0{,}6\,m$

a)

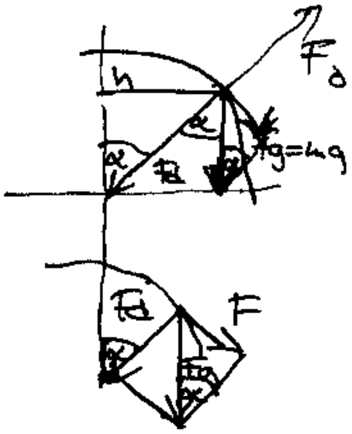


$F_o = m\frac{v^2}{R}$



$\cancel{\cos\alpha = \frac{mg}{F_d}}$

$F_d = mg \cdot \cos\alpha$



$F_o = F_d$

$m\frac{v^2}{R} = mg \cdot \cos\alpha$

$v^2 = Rg\cos\alpha$

$2gh = Rg\,\frac{R-h}{R}$

$2h = R - h$

$h = \frac{R}{3} = 0{,}2\,m$ od vrchu koule

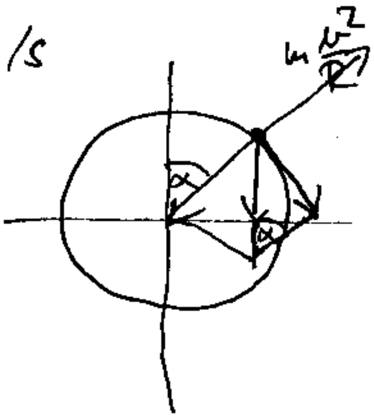
$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$v^2 = 2gh$

$v = \sqrt{2gh}$

b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{R}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}gR} = 2\,m/s$



1-2

a)

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}}$$

$\frac{1}{2}m_e v^2 = e \cdot U \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

$p = m \cdot v = m \cdot \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{2meU}$

$p = 2{,}0899 = 2{,}09 \cdot 10^{-23}\,kg\,m/s$

$\lambda = 3{,}16 \cdot 10^{-11}\,m = 3{,}16 \cdot 10^{-2}\,\mu m$

b) $v = 3 \cdot 10^7$ $\quad p = m \cdot v = 2{,}73 \cdot 10^{-23}\,kg\,m/s$

$\lambda = \frac{h}{p} = 2{,}42 \cdot 10^{-11} = 2{,}42 \cdot 10^{-2}\,\mu m$

18.9.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

5-1

Elektron je urychlován homogenním elektrickým polem. Velikost zrychlení elektronu je přitom $a = 10^{12}\ m\ s^{-2}$. Určete

a) intenzitu elektrického pole, jež elektron urychluje

b) práci vykonanou elektrickým polem při urychlování tohoto elektronu za dobu $t = 10^{-6}\ s$ od okamžiku, kdy byl elektron v klidu.

Je dána velikost náboje a hmotnosti elektronu: $e = 1{,}6.10^{-19}\ As$, $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$

(max. 8 bodů)

5-2

a) Co musí platit pro sílu působící na hmotné těleso, aby toto těleso začalo vykonávat kmity?

b) Závaží o hmotnosti 20 *g* je připevněno na pružině o zanedbatelné hmotnosti. Závaží bylo původně v klidu ve své rovnovážné poloze, a po dodání energie 0,1 *J* začalo vykonávat netlumené lineární harmonické kmity o amplitudě 3 *cm*. Určete jejich frekvenci!

(max. 7 bodů)

5-1 a) $\vec{a} = 1\cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$ $\quad e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$ $\quad m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg$

$E = ?$ $\quad W_{za}\ t = 1\cdot 10^{-6}\,s$ $\quad \boxed{\vec{F} = q\cdot\vec{E}}$

$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = q\cdot U$ $\quad a = \frac{v}{t}$ $\quad \boxed{\vec{F} = m\cdot\vec{a}}$

$$m\cdot a = q\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{m\vec{a}}{q} = \underline{5{,}75\,\frac{V}{m}}$$

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,d\vec{r}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\cdot\vec{E}\,d\vec{r} = \underline{q\cdot E\cdot l}$$

$$l = \underbrace{v_0}_{0} t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow l = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^{12}\cdot (1\cdot 10^{-6})^2 = 5\cdot 10^{11}\,m$$

$$A = 5{,}75\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{11} = 0{,}46\cdot 10^{-6}\,J$$

5-2

a) aby její velikost byla přímo úměrná velikosti výchylky x

b) 

$W = 0{,}1\,J$ $\quad \omega = ?$ $\quad \omega_t = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$A = 3\,cm$

$m = 20\,g$

$F = -kx$ $\quad F = m\cdot a$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot m = F = -k\cdot x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x =$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Řešení rce: $x = U\cdot\sin(\omega t + \varphi)$

Práce síly potřebná k vychýlení závaží je rovna celkové energii kmit. pohybu

$$A = -\int_0^{y_{max}} F\,dx = \int_0^U kx\,dx = \frac{1}{2}kU^2 = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k} U^2$$

$$A = \frac{1}{2}m\omega^2U^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2A}{mU^2}}$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{2A}{mU^2}}}{2\pi}$$

19. dubna 1997

První souborná zkouška - FYZIKA

1-1

Těleso o hmotnosti $m_1 = 3\ kg$ se pohybuje rychlostí $v_1 = 4\ m/s$ a narazí do tělesa stejné hmotnosti, jež je v klidu. Za předpokladu, že tato srážka je dokonale nepružná, určete
a) jaká je rychlost tělesa (obou těles) po srážce,
b) jaké množství energie celkem se spotřebuje na deformaci a ohřátí těles při srážce a případné zvukové efekty.

(max. 7 bodů)

1-2

a) Formulujte Keplerovy zákony.
b) Pomocí zákonů dynamiky a vztahů pro gravitační pole dokažte platnost třetího Keplerova zákona pro speciální případ dvou planet, které se pohybují po drahách ve tvaru kružnic.

(max. 8 bodů)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$$v = \frac{v_1}{2} = 2\ m/s \qquad \Delta W_k = \frac{1}{2}\, 3 \cdot 16 - \frac{1}{2}\, 6 \cdot 4 = 12\ J$$

$$\varkappa \frac{Mm}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$\varkappa \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\varkappa M} r^3$$

1-1

$m_1 = 3\,kg \qquad m_2 = 3\,kg$

$v_1 = 4\,m/s \qquad v_2 = 0$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1+m_2)\,v$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v^2$$

$$3 \cdot 4 = 6 \cdot v \rightarrow \underline{v = 2\,m/s}$$

$$W_h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v^2 = 12\ J$$

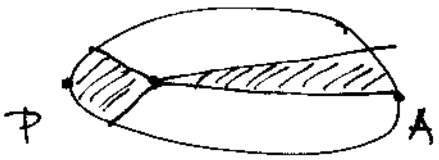
1-2

a) 1) Planety obíhají po eliptických drahách, v jejichž společném ohnisku je Slunce

2) Plochy opsané průvodičem téže planety jsou za stejnou dobu stejné

3) Druhé mocniny oběžných dob planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



V P má planeta daleko větší rychlost než v A

První souborná zkouška - FYZIKA

1-1

Elektron vletí do homogenního magnetického pole o indukci B = 0,03 T rychlostí $v = 10^7$ m/s tak, že směr jeho rychlosti je kolmý na směr vektoru indukce B. Pod vlivem pole se pak elektron pohybuje po oblouku kružnice o poloměru R = 1,89 mm. Z těchto údajů určete

a) měrný náboj elektronu, tj. e/m_e ,

b) velikost tečného a normálového zrychlení elektronu při jeho pohybu.

(max. 8 bodů)

1-2

Hmotný bod vykonává současně dva harmonické kmitavé pohyby ve dvou navzájem kolmých směrech (ve směrech os X a Y):

$x = 2A \sin \omega t$

$y = A \sin 2\omega t$ (ω je kruhová frekvence pohybů, t je čas).

a) Popište tvar křivky, kterou hmotný bod opisuje v rovině XY. O jakou křivku se jedná?

b) Určete analytický tvar rovnice této křivky.

(max. 7 bodů)

1-1

$B = 0{,}03\,T$

$v = 10^7\ m/s$

$R = 1{,}89\,mm = 1{,}89 \cdot 10^{-3}\,m$

$a_t = ?\quad a_n = ?\quad e/m_e$

$$\boxed{F_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}\qquad \boxed{F_d = m \cdot a = m\frac{v^2}{r}}$$

$$q \cdot v \cdot B = m\frac{v^2}{r}$$

$$q B = m\frac{v}{r}$$

a) $\frac{q}{m} = \frac{v}{Br} = 1{,}7636 \cdot 10^{11}\,\frac{C}{kg}$

b) $a_t = 0$ (pole neurychluje)

$a_n = \frac{v^2}{r} = 5{,}29 \cdot 10^{16}\ m/s^2$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

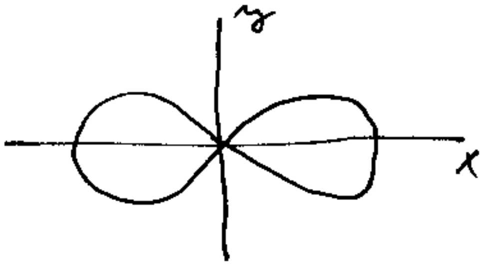
$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

1-2

$x = 2A \sin \omega t$

$y = A \cdot \sin 2\omega t$

a)



b) $\sin \omega t = \frac{x}{2A}$

$$y = A \cdot 2 \sin\omega t \cdot \cos\omega t = x \cdot \cos\omega t =$$

$$= x\sqrt{1 - \sin^2\omega t} = x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4A^2}}$$

$$\Rightarrow\quad y = x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4A^2}}$$

$$y^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{4A}\right)$$

$$4A^2y^2 = 4A^2x - x^4$$

1. státní zkouška

FYZIKA

1-1

V nádobě je uzavřeno 500 g argonu při teplotě 27 ^{o}C. Aniž by se změnil objem nádoby, dodáme argonu teplo 3500 J.

a) Jaká bude výsledná teplota plynu v nádobě?

b) Jak se přitom změní střední hodnota kinetické energie 1 molekul plynu?

Je dána molární hmotnost argonu M = 0,04 kg/mol, Avogadrova konstanta N = 6,02 .10^{23} mol^{-1}, molární plynová konstanta R = 8,314 J/mol.K.

(max. 8 bodů)

1-2

a) Definujte poločas rozpadu!

b) Prvek radium ^{226}Ra je α-radioaktivní, za jednu sekundu se v jednom gramu radia rozpadne 3,7.10^{10} atomů. Poločas rozpadu radia je T = 1590 roků. Určete z těchto údajů hodnotu Avogadrovy konstanty!

(max. 7 bodů)

$$dN = -\lambda N dt$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

pro $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$M = \frac{m}{n} \left[\frac{kg}{mol}\right] =$$

$$N_A = \frac{N}{n}$$

$$n = N/N_A = \frac{m}{M}$$

$$N = \frac{1}{\lambda}\left|\frac{dN}{dt}\right| \qquad dN < 0$$

$$N_A = \frac{m}{\cancel{?}}\ \text{rel. at. hm.} \cdot \frac{1}{\lambda}\left|\frac{dN}{dt}\right|$$

molární hmotnost

$$= \frac{226{,}05 \cdot 1590 \cdot 365 \cdot 86400}{|\ln 2|} \cdot (10^{10}$$

0,693

$$= 6{,}08 \cdot 10^{23}/mol$$

1-1

a) $m = 500\,g = 0{,}5\,kg$ izochorický děj $V = konst$

$T_1 = 27\,°C = 300\,K$

$Q = 3500\,J$ $M_{Ar} = 0{,}04\,kg/mol$ $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{mol}$

$T_2 = ?$ $R = 8{,}314\,\frac{J}{mol\,K}$

$C_V = \frac{3}{2} R$ ... molární tep. kapacita

$Q = n C_V (T_2 - T_1)$

$C_V = \frac{i}{2} R$

$C_p = C_V + R$

$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ $\varkappa = \frac{C_p}{C_V}$

$$3500 = \frac{0{,}5}{0{,}04} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}314\,\underbrace{(T_2 - 300)}_{\Delta T}$$

$\Delta T = 22{,}45$

$T_2 = 27 + 22{,}45 = 49{,}45\,°C$

b) $W_k = \frac{3}{2} k T$ ← Boltzmanova konst.

$T_1 = 27 + 273 = 300\,K$

$T_2 = 49{,}45 + 273 = 322{,}45$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{3}{2} k T_2}{\frac{3}{2} k T_1} = 1{,}075 \Rightarrow W_k \text{ vzroste o } 7{,}5\,\%$$

$\Delta W = W_2 - W_1 = 4{,}65 \cdot 10^{-22}\,J$

1-2

a) Poločas rozpadu τ je doba, za kterou se přemění z daného vzorku právě polovina z původního počtu atomů.

b) ^{226}Ra – α-radioaktivní

za 1 s se přemění $3{,}7 \cdot 10^{10}$ atomů v 1 g

poločas rozpadu $T = 1590$ roků

$N_A = ?$

$^{A}_{Z}X$ A – protony + neutrony

Z – počet protonů

$A = Z + N$

$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ← rozpad. konst.

$-dn = \lambda n\,dt$ | $n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$

22.11.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

letící v okamžiku
nárazu rychl. v

2-1

Dřevěná tyč ve tvaru homogenního válce o délce $l = 1\ m$ a hmotnosti $m_1 = 1\ kg$ se může volně otáčet kolem osy, která prochází kolmo středem tyče. Tyč je ve stavu klidu, na konec tyče však narazí střela o hmotnosti $m_2 = 10\ g$, letící rychlostí $v = 100\ m/s$ ve směru kolmém na tyč i na osu otáčení, a uvízne v tyči.

a) Určete úhlovou rychlost otáčení tyče.

b) Určete její moment hybnosti po uváznutí střely.

Moment setrvačnosti homogenní tyče vzhledem k ose otáčení je $J_o = m_1 l^2/12$

(max. 8 bodů)

2-2

a) Definujte entropii.

b) Jak se změní entropie ideálního plynu teploty $t = 20\ °C$, tlaku $p = 0{,}101\ Pa$ a objemu $V = 2\ l$, když expanduje do vakua na dvojnásobný objem?

(max. 7 bodů)

Nelze počítat se zák. zach. energie. Srážka je nepružná!

$$\left(\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_2 \frac{l^2}{4}\right)\omega = m_2 v \frac{l}{2}$$

$$dS = \frac{p\,dV}{T} = n R_m \frac{dV}{V}$$ izotermický děj

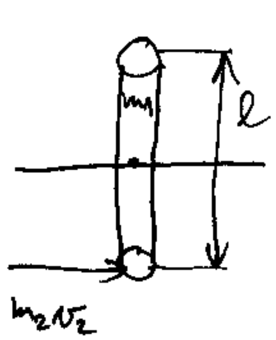
$$\Delta S = n R_m \ln \frac{2V}{V} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln 2$$

2-1 tyč: $l = 1\,m$, $m_1 = 1\,kg$, $J_0 = \frac{m l^2}{12}$

střela: $m_2 = 10\,g$, $v_2 = 100\,m/s$

$\omega = ?$, $b = ?$

$\boxed{\vec{b} = \vec{p} \cdot \vec{r} = m \vec{v} \times \vec{r}}$



$\boxed{b_1 = b_2}$ moment hybnosti

před rázem, po rázu

$b_1 = m_2 v_2 \cdot \frac{l}{2}$ ... před rázem

$b_2 = \omega J = \omega \left(\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right)$ - po rázu

a) $\omega = \dfrac{m_2 v_2 \cdot \frac{l}{2}}{\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{m_2 v}{\frac{1}{6} m_1 l + m_2 \frac{l}{2}}$

b) b_1 nebo b_2

2-2 a) $dS = \frac{\delta Q}{T}$ – míra neuspořádanosti systému

b) $T_1 = 20°C$, $p_1 = 0{,}1\,MPa$, $V_1 = 2\,l$ | $T_2 = T_1$, $V_2 = 4\,l$

$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{p_1}{p_2}$

$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$

$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \ln \frac{2V}{V} =$

$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln 2$

17.4.1999

První souborná zkouška - FYZIKA

4-1

Nabitá částice se pohybuje v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0{,}5\ T$ po kružnici o poloměru $R = 4{,}15\ cm$ rychlostí $v = 10^6\ m/s$. Určete

a) velikost náboje částice, známe-li energii částice: $W = 20{,}75\ keV$,

b) velikost a směr síly, kterou na částici působí uvedené magnetické pole.

Je dána velikost elektrického náboje elektronu: $e = 1{,}6.10^{-19}\ As$.

(max. 8 bodů)

4-2

Určete změnu entropie 1 kg dusíku, byl-li ohřát z teploty 5 °C na teplotu 55 °C

a) izochoricky

b) adiabaticky.

Měrná tepelná kapacita dusíku $c_V = 740\ J/kg.K$

(max. 7 bodů)

4-1 $B = 0{,}5\,T$

$R = 4{,}15\,cm = 0{,}0415\,m$

$v = 10^8\,m/s$ $\quad q = ?$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As$

$W = 20{,}75\,keV = 3{,}32 \cdot 10^{-15}\,J$ $\quad W_k = \frac{1}{2} m v^2$

$1\,eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$

$\cancel{F_L = q v B}$

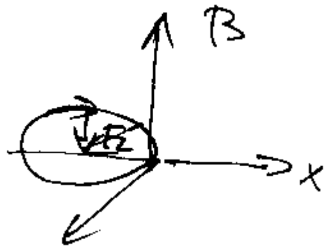
$F_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q v B \sin\alpha$

$q v B = m \frac{v^2}{R}$

$F_d = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{R}$

$q = \frac{m v}{B R}$ $\quad W = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow m = \frac{2W}{v^2}$

$q = \frac{\frac{2W}{v^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{v}}{B R} = \frac{\frac{2W}{v}}{B R} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\,C$



$F_L = q v B = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\,N$

4-2

$m = 1\,kg$

$T_1 = 5\,°C$ $\quad T_2 = 55\,°C$ $\quad c_v = 740\,\frac{J}{kg\,K}$

$\Delta S = ?$

a) izochoricky $\qquad$ b) adiabaticky

$\Delta S = n C_v \ln \frac{T_2}{T_1}$ $\qquad \Delta S = \frac{\delta Q}{T} = 0\,\left[\frac{J}{K}\right]$

$C_v = \frac{1}{n} m c_v$, $C_p = \frac{1}{n} m c_p$

$\Delta S = \frac{1}{\cancel{n}} m c_v \cdot \cancel{n} \ln \frac{T_2}{T_1} = 1774\,\frac{J}{K}$

1. státní zkouška

FYZIKA

2-1

Střela vystřelená svisle vzhůru má počáteční rychlost o velikosti v = 1000 m/s. Vypočítejte maximální výšku výstupu střely

a) za předpokladu, že tíhové zrychlení je po celé dráze střely konstantní a rovná se tíhovému zrychlení na povrchu Země g = 9,81 m/s^2,

b) se započtením skutečnosti, že tíhové zrychlení závisí na výšce nad povrchem Země. Je dána velikost poloměru Země R = 6370 km.

Odpor vzduchu a vliv rotace Země v žádném z obou případů neuvažujte.

(max. 8 bodů)

2-2

a) Jaký je vztah mezi napětím a intenzitou elektrického pole?

b) Protony v cyklotronu se pohybují kolmo na směr homogenního, časově neproměnného magnetického pole. V poslední půlotáčce své dráhy mají rychlost 4,4.10^7 m/s. Určete velikost magnetické indukce v tomto cyklotronu, je-li poloměr dráhy protonů roven R = 31 cm. Je dána velikost hmotnosti protonu m = 1,67.10^{-27} kg a jeho náboje e = 1,6.10^{-19} As.(Počítejte podle vztahů nerelativistické mechaniky!)

$$h = \frac{v^2}{2g} = 51 \cdot 10^3\ m$$

(max. 7 bodů)

$$\int_R^{R+h} mg\, dr = \int_R^{R+h} m M_Z \varkappa \frac{dr}{r^2} = \varkappa m M_Z \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$g = \varkappa \frac{M_Z}{R^2} \Rightarrow \varkappa M_Z = g R^2 \qquad 2gR = v^2 \frac{R}{h} + v^2$$

$$R - \frac{R^2}{R+h} = \frac{R^2 + Rh - R^2}{R+h} = \frac{R}{\frac{R}{h} + 1} \qquad \frac{1}{2gR - v^2} = \frac{h}{v^2 R}$$

$$h = \frac{10^6 \cdot 6370 \cdot 10^3}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6370 \cdot 10^3 - 10^6} = \frac{6370 \cdot 10^3}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 - 1} \doteq \frac{6370 \cdot 10^3}{124} = 51{,}37 \cdot 10^3\ m$$

pro $v^2 \ll 2gR$ je $h = \frac{v^2}{2g}$.

2-1 $v_0 = 1000\,m/s$
$g = 9{,}81\,m/s^2$
$R = 6378\,km$

a) $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$v = v_0 - \cancel{\frac{1}{2}} g t$

$0 = v_0 - gt \rightarrow t = \frac{v_0}{g}$

$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \left(\frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}}\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$

$h = 50{,}9 \cdot 10^3\,m$

b) $F = \varkappa \frac{M}{R^2} \cdot m$

$g_0 = \varkappa \cdot \frac{M}{R^2}$

2-2 a) $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ $\quad U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l}$

b) $v = 4{,}4 \cdot 10^7\,m/s$
$R = 31\,cm = 0{,}31\,m$
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As$

$B = ?$ $\quad F_L = q \cdot \vec{v} \times B$

$F_Z = \frac{v^2}{R} \cdot m = m \cdot a$

$q \cancel{v} B = \frac{v^{\cancel{2}}}{R} \cdot m$

$B = \frac{v \cdot m}{R \cdot q} = \frac{4{,}4 \cdot 10^7 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{0{,}31 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}$

$\underline{\underline{B = 1{,}48\,T}}$

1. státní zkouška

FYZIKA

4-1

Kyslík O_2 (nuklid $^{16}{}_8O$) o hmotnosti m = 5 g, o počátečním tlaku p = 100 kPa a počáteční teplotě t = 20 ^{0}C je stlačován na konečný tlak 1 MPa.
a) Určete práci, kterou je třeba na toto stlačení vynaložit, probíhá-li děj izotermicky.
b) Určete množství tepla, které je třeba při tomto ději plynu odebrat.
Je dáno R = 8,314 J/mol.K.

(max. 7 bodů)

4-2

a) Definujte potenciál elektrického pole!
b) Určete rychlost, jíž dopadají elektrony na stínítko obrazovky televizoru, je-li urychlovací napětí rovno U = 20 kV. Použijte k tomu vztahů speciální teorie relativity. Počáteční rychlost elektronů při opouštění katody pokládejte za nulovou. Je dána hmotnost elektronu m = $9{,}1.10^{-31}$ kg a jeho náboj e = $1{,}6.10^{-19}$ As, rychlost světla je c = 3.10^8 m/s.

(max. 8 bodů)

4-1 $m = 5g = 0{,}005\,kg$ $R = 8{,}314\ J/mol\,K$ a) $A = ?$ izoterm.

$p_1 = 100\,kPa$ $p_2 = 1\,MPa$ b) $Q = ?$ $T = konst$

$T_1 = 20°C = 293\,K$

$p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$n = \frac{m}{M}$ $n = \frac{m}{\text{počet nukleonů (protonů + neutronů) v molekule}}$

hmotnost dosazuju v gramech, protože je to v molech, kdyby to bylo v kilomolech tak dosazuju v kilogramech

a) $A = \frac{5}{32} \cdot 8{,}314 \cdot 293 \cdot \ln \frac{10^5}{10^6} = -876{,}4\ J$

b) $Q = A = -876{,}4\ J$

4-2 a) potenciál

$\varphi = -\int \vec{E}\,d\vec{l} + konst$

$\varphi = \int_A^r \vec{E}\,d\vec{r}$

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E}\,d\vec{r} = -q\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -q(\varphi_2 - \varphi_1)$$

b) $U = 20\,kV$

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$

$c = 3 \cdot 10^8\,m/s$

b $\boxed{W = q \cdot U}$ $W_k = mc^2 - m_0c^2$

$q \cdot U =$ klasicky: $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ $v_1 = 0$

relativisticky: $mc^2 - m_0c^2$

relativisticky: $U > 20\,kV$

celk. energie = pohybová + klidová

mc^2 m_0c^2 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$$qU = mc^2 - m_0c^2$$

$$qU + m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \cdot c^2$$

$$\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = \frac{m_0c^2}{qU + m_0c^2}$$

$$1-(\frac{v}{c})^2 = \frac{m_0^2c^4}{(qU+m_0c^2)^2}$$

$$(\frac{v}{c})^2 = 1 - \frac{m_0^2c^4}{(qU+m_0c^2)^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(qU+m_0c^2)^2}} = 8{,}15 \cdot 10^7\ m/s$$

První souborná zkouška - FYZIKA

4-1

Vlak, který jede po vodorovné trati ve tvaru kruhového oblouku o poloměru $R = 800$ m, rovnoměrně s časem snižuje svoji rychlost a to tak, že jeho rychlost klesne po ujetí dráhy o délce $l = 800$ m z velikosti $v_1 = 15$ m/s na $v_2 = 5$ m/s. Určete

a) za jakou dobu vlak urazí dráhu l,
b) velikost zrychlení pohybu vlaku za začátku a na konci této dráhy.

(max. 8 bodů)

4-2

Solární konstanta udává množství energie, jež dopadne za 1 s na plochu 1 m^2 postavenou vně zemské atmosféry ve vzdálenosti rovné střední vzdálenosti Země od Slunce $R = 1{,}49.10^{11}$ m kolmo na směr slunečních paprsků. Její velikost je rovna 1370 W/m^2.

a) Určete celkový výkon záření Slunce.
b) Určete celkový počet fotonů emitovaných Sluncem za 1 s. Počítejte s průměrnou vlnovou délkou slunečního záření rovnou $\lambda = 600$ nm.

Je dáno: $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, $c = 3.10^8$ m/s.

(max. 7 bodů)

4-1

$l = 800\,m$ $\quad v_1 = 15\,m/s$ $\quad v_2 = 5\,m/s$

$t = ?\ (s = 800\,m)$

$v_2 = v_1 - a_t t \Rightarrow a_t = \dfrac{v_1 - v_2}{t}$

$s = v_1 t - \frac{1}{2} a_t t^2$

a)

$$s = v_1 t - \frac{1}{2}\frac{v_1 - v_2}{\cancel{t}}\cdot t^{\cancel{2}} = v_1 t - \frac{1}{2} v_1 t + \frac{1}{2} v_2 t = \frac{v_1 + v_2}{2} t$$

$$t = \frac{2s}{v_1 + v_2} = 80\,s \qquad a_t = \frac{10}{80} = 0{,}125\,m/s^2$$

b) $a_t = konst$

$a_{n1} = \dfrac{v_1^2}{R} = 0{,}281\,m/s^2$

$a_{n2} = \dfrac{v_2^2}{R} = 0{,}0312\,m/s^2$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$a_1 = 0{,}307\,m/s^2$

$a_2 = 0{,}128\,m/s^2$

4-2

a) $I_s = 1370\,W/m^2$ $\quad d = 1{,}49\cdot 10^{11}\,m$

$$W = 4\pi R_s^2 I_s = 4\pi d^2 I_s = 3{,}822\cdot 10^{26}\,W$$

b) $\lambda = 600\,nm = 6\cdot 10^{-7}\,m$ $\quad h = 6{,}6\cdot 10^{-34}\,Js$ $\quad c = 3\cdot 10^8\,m/s$

energie fotonu $= W_f = h\cdot\nu = h\cdot\dfrac{c}{\lambda} = 3{,}3\cdot 10^{-19}\,J$

počet fotonů za 1 s

$$n = \frac{W}{W_f} = 1{,}16\cdot 10^{45}\,s^{-1}$$

První souborná zkouška - FYZIKA

5-1

Koule o hmotnosti $m = 0{,}2$ kg a jiná stejně velká koule, jejíž hmotnost není předem známa, se pohybují proti sobě rychlostmi o stejné velikosti $v = 1$ m/s. Po srážce obou koulí zůstane koule s neznámou hmotností v klidu a koule s hmotností m se odrazí v opačném směru, než se pohybovala před srážkou. Za předpokladu, že obě koule jsou dokonale pružné, určete

a) jaká je hmotnost druhé koule
b) jaká je velikost rychlosti koule o hmotnosti m po srážce.

(max. 8 bodů)

5-2

a) Popište Carnotův cyklus, napište vztah pro jeho účinnost.

b) Jak se změní entropie ideálního plynu po absolvování jednoho Carnotova cyklu?

(max. 7 bodů)

$$(m - m_x) v = - m v_x$$

$$\frac{1}{2}(m + m_x) v^2 = \frac{1}{2} m v_x^2$$

$$v_x^2 = \frac{(m - m_x)^2 v^2}{m^2}$$

$$(m + m_x) v^2 = \frac{(m - m_x)^2 v^2}{m}$$

$$m^2 + m m_x = m^2 - 2 m m_x + m_x^2$$

$$m_x = 3m = 0{,}6\ \text{kg}$$

$$2 m v = m v_x$$

$$v_x = 2v = 2\ \text{m/s}$$

5-1

$m_1 = 0{,}2\,kg$ $\quad m_2 = ?$ $\quad v_2 = 0$

$v_1 = 1\,m/s$

$v_1 = 1\,m/s$ $\quad v_1 = -v_x$

$$m_1 v_1 - m_2 v_1 = -m_1 v_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 \quad /2$$

$$v_1 (m_1 - m_2) = -m_1 v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1 (m_1 - m_2)}{m_1}$$

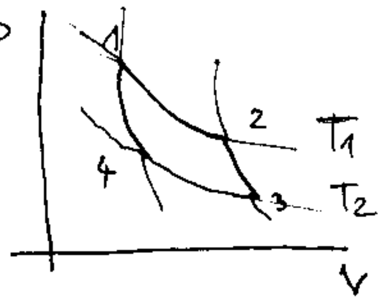
$$m_1 v_1^2 + m_2 v_1^2 = m_1 \cdot \left(-\frac{v_1 (m_1 - m_2)}{m_1} \right)^2$$
$$m_1 \cancel{v_1^2} + m_2 \cancel{v_1^2} = \frac{\cancel{m_1} \cancel{v_1^2}}{m_1^2} (m_1^2 - 2 m_1 m_2 + m_2^2)$$
$$\cancel{m_1 v_1^2} + m_2 v_1^2 = \cancel{v_1^2 m_1} - 2 v_1^2 m_2 + v_1^2 \frac{m_2^2}{m_1}$$
$$\cancel{0{,}2 \cdot 1} + m_2 \cdot 1 = \cancel{1 \cdot 0{,}2} - 2 m_2 + 1 \cdot \frac{m_2^2}{0{,}2}$$
$$3 m_2 = \frac{m_2^2}{0{,}2} \qquad \cancel{0{,}2 m_2 - m_2^2 = 0} \qquad \cancel{m_2 (0{,}2 - m_2) = 0}$$
$$3 \cdot 0{,}2 = m_2 \Rightarrow \underline{\underline{m_2 = 0{,}6}}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{1}{m_1} (m_1^2 - 2 m_1 m_2 + m_2^2)$$
$$m_2 = -2 m_2 + \frac{m_2^2}{m_1}$$
$$\cancel{0 - m_2 + \frac{m_2^2}{m_1}} \qquad 3 m_2 = \frac{m_2^2}{m_1}$$
$$\cancel{m_1 m_2 + m_2^2 = 0}$$

$$v_2 = -1 \frac{(0{,}2 - 0{,}6)}{0{,}2} = \underline{\underline{2\,m/s}}$$

5-2

a)



1-2 izotermická expanze
2-3 adiabatická expanze
3-4 izotermická komprese
4-1 adiabatická komprese

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

b) $\Delta S = 0$

1. státní zkouška

FYZIKA

13-1

Kyslík O_2 (nuklid $^{16}_{8}O$) o hmotnosti m = 5 g, o počátečním tlaku p = 100 kPa a počáteční teplotě t = 20 ^{0}C je stlačován na konečný tlak 2 MPa.
a) Určete práci, kterou je třeba na toto stlačení vynaložit, probíhá-li děj izotermicky.
b) Určete množství tepla, které je třeba při tomto ději plynu odebrat.
Je dáno R = 8,314 J/mol.K.

(max. 9 bodů)

13-2

a) Co je fotoelektrický jev?
b) Výstupní práce materiálu dané fotokatody je A = 2 eV. Jaká je nejdelší vlnová délka, při níž ještě dochází k fotoemisi?
Je dána Planckova konstanta $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, náboj elektronu $e = 1{,}6.10^{-19}$ As, rychlost světla $c = 3.10^{8}$ m/s.

(max. 6 bodů)

13-1 viz. 4.1.

13-2 a) Je-li povrch kovové katody osvětlen krátkovlnným zářením, jsou z povrchu emitovány elektrony a vodičem může procházet el. proud.

b) $A = 2eV$

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ Js$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$

$c = 3 \cdot 10^{8}\ m/s$

$$\boxed{h \cdot \nu = A + \frac{1}{2} m_0 v^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} h \cdot \nu = A \\ h \cdot \frac{c}{\lambda} = A \end{array}}$$

$$h \cdot \nu = A$$

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = A \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{A} =$$

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1650\ nm$$

20.4.1996

První souborná zkouška - FYZIKA

6-1

Po nakloněné rovině, jež svírá a horizontálou úhel $\alpha = 30°$, se z klidu začne valit (bez prokluzování) homogenní koule o poloměru $R = 5$ cm a hmotnosti $m = 7$ kg.
(Moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose procházejíci jejím středem je roven $J_o = 2/5\ mR^2$.)

Určete
a) rychlost, s níž se bude pohybovat těžiště koule po proběhnutí dráhy $s = 5$ m, 4
b) čas, který k proběhnutí této dráhy bude koule potřebovat. 4

Je dáno $g = 10\ m/s^2$

(max. 8 bodů)

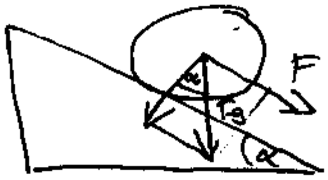
6-2

a) Napište Schrödingerovu rovnici, pojmenujte jednotlivé veličiny a symboly v ní použité. 4
b) Vysvětlete fyzikální význam vlnové funkce v kvantové mechanice. 3

(max. 7 bodů)

ad 1 ... $M_0 = J\varepsilon$
... $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

6-1



$J = \frac{2}{5} m R^2$ $s = 5\,m$, $t = ?$

$R = 5\,cm$
$m = 7\,kg$
$\alpha = 30°$

$$\boxed{\sum \vec{M}_i = J \cdot \vec{\varepsilon}}$$

moment síly
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$\sin\alpha = \frac{F}{F_g} \Rightarrow F = mg \cdot \sin\alpha$

$M = r \cdot m \cdot g \sin\alpha$

moment setrvačnosti

$\boxed{J = m \cdot r^2}$ – pro 1 hmotný bod rotující kolem své osy ve vzdálenosti r

$J = \sum r_i^2 m_i$ – pro soustavu

celkový moment setrvačnosti

$J = mr^2 + \frac{2}{5} mr^2 = \underline{\frac{7}{5} mr^2}$

$J \cdot \varepsilon = M$

$\varepsilon\left(\frac{7}{5}\cancel{m}r^{\cancel{2}}\right) = \cancel{r} \cdot \cancel{m} g \cdot \sin\alpha$

$\varepsilon = \frac{5}{7} \frac{g \cdot \sin\alpha}{r}$

$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}$

$a_t = \frac{5}{7} mg \sin\alpha = 2{,}5 \frac{m}{s^2}$

$s = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \frac{2s}{a} = \frac{2 \cdot 5}{2{,}5} = \underline{\underline{4\,s}}$

$v = v_0 + at$
$v = 2{,}5 \cdot 4 = \underline{\underline{10\,m/s}}$

6-2 a) $\hat{H}\Psi = E\Psi$

$\hat{H}$ – hamiltonův operátor
Ψ – vlnová funkce
E – energie

b) vlnová funkce – popisuje chování částice

20.4.96

1. státní zkouška

FYZIKA

7-1

Elektron vletí rychlostí $v = 2.10^7$ m/s do homogenního magnetického pole o indukci $B = 0{,}02$ T tak, že směr jeho rychlosti svírá se směrem magnetické indukce úhel $\alpha = 30^o$. Určete

a) jaká bude jeho dráha v daném magnetickém poli, 5

b) jaká bude velikost tečného a normálového zrychlení při jeho pohybu. 4

Je dána hmotnost elektronu $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg, náboj elektronu $e = 1{,}6.10^{-19}$ As.

(max. 9 bodů)

7-2

a) Co je fotoelektrický jev?

b) Výstupní práce materiálu dané fotokatody je $A = 2$ eV. Jaká je nejdelší vlnová délka, při níž ještě dochází k fotoemisi?

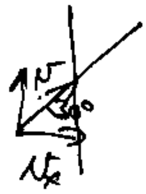
Je dána Planckova konstanta $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, náboj elektronu $e = 1{,}6.10^{-19}$ As, rychlost světla $c = 3.10^8$ m/s.

(max. 6 bodů)

7.1 $v = 2\cdot 10^7\ m/s$

$B = 0{,}02\ T$

$\alpha = 30$



a) šroubovice

b) $a_t = 0$

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$

$a_n = \dfrac{2qu}{m} \cdot \sin^2\alpha$

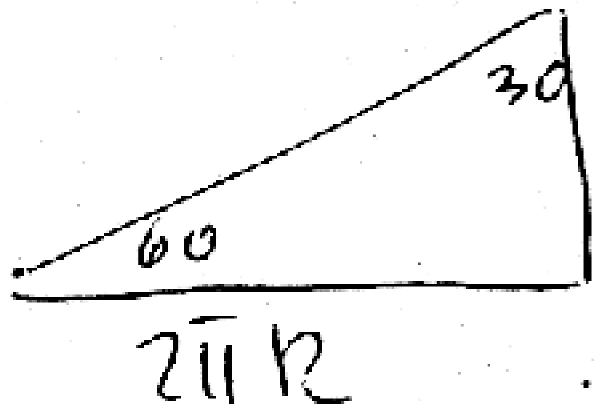
$F_d = m \cdot \dfrac{v_x^2}{R}$

$a_n = \dfrac{v_x^2}{R} = \dfrac{v^2 \cdot \sin^2\alpha}{R}$

$F_L = q \cdot \vec{v}_x \times B$

$m\dfrac{v_x^2}{R} = q v_x B \Rightarrow R = \dfrac{m v_x}{qB} = \dfrac{m v \cdot \sin\alpha}{qB}$

$a_n = \dfrac{v^2 \cdot \sin^2\alpha}{\dfrac{m v \sin\alpha}{qB}} = \dfrac{qB}{m} v \sin\alpha$



$h = 2\pi R \cot g\,\alpha$

18.4.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

10-1

Elektron, urychlený potenciálním rozdílem U = 6 *kV*, vletěl do homogenního magnetického pole o velikosti magnetické indukce B = 0,01 *T* pod úhlem α=30 ° vzhledem ke směru mg. pole, takže se začal pohybovat po dráze ve tvaru šroubovice.
Určete
a) poloměr šroubovice,
b) stoupání šroubovice. asi 12 cm
Hmotnost elektronu m = 9,1 . 10^{-31} *kg*, náboj e = 1,6 . 10^{-19} *As*

(max. 8 bodů)

10-2

a) Popište činnost difrakční mřížky.

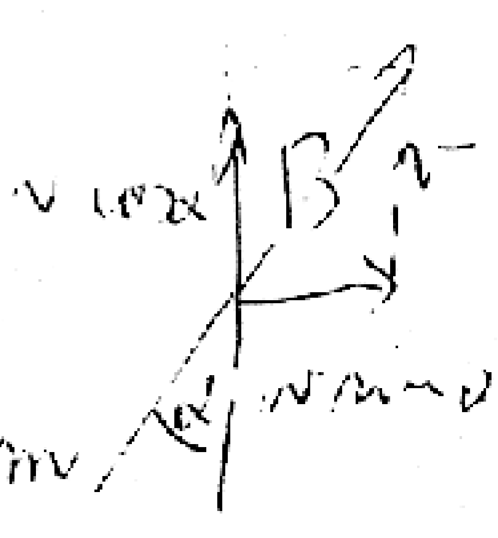
b) Určete nejvyšší řád spektra, v němž je ještě možné pozorovat záření o vlnové délce 700 *nm* pomocí difrakční mřížky, která má 300 vrypů na 1 *mm*.

(max. 7 bodů)

$qU = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 6\cdot 10^{3}\cdot 10^{31}}{10^{19}\cdot 9{,}1}} = 4{,}6\cdot 10$

$R = \frac{m v \sin\alpha}{qB} = \sqrt{\frac{m^2\, 2eU \sin^2\alpha}{m e^2 B^2}} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}\,\sin\alpha = 1{,}3\cdot 10^{-2}\,m$

[illegible] $= \frac{2\pi R}{v \sin\alpha} = \frac{h}{v\cos\alpha} \qquad h = 2\pi R \cot g\,\alpha$



$h = 2\pi \frac{\sin\alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\cot g\,\alpha = \frac{2\pi}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\cos\alpha = 0{,}14\,m$

$d\cdot \sin\alpha_m = n\lambda \qquad \max \frac{d}{\lambda} = \frac{10^6}{300\cdot 700} = 4{,}76 \Rightarrow n = 4$

10-1 $U = 6\,kV$ $m = 9{,}1\cdot10^{-31}\,kg$
$B = 0{,}01\,T$ $e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,C$
$\alpha = 30°$

$F_L = q\cdot v\times B$ $\boxed{F_d = m\frac{v^2}{R}}$

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

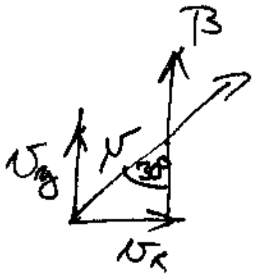
$W_{pole} = q\cdot U$

$\frac{1}{2}mv^2 = q\cdot U$

$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

$q\cancel{v}B = m\frac{v^{\cancel{2}}}{R}$

$R = \frac{mv}{qB}$



$\sin 30 = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = v\cdot\sin 30°$

a)

$R = \frac{m\cdot\sqrt{\frac{2qU}{m}}\cdot\sin 30°}{qB} = \underline{\underline{0{,}013\,m}}$

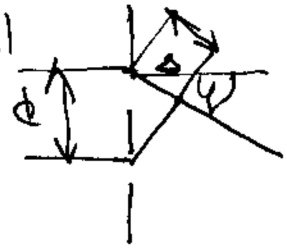
$v_y = v\cdot\cos 30$

$t = \frac{2\pi R}{v_x} = \frac{2\pi R}{v\cdot\sin\alpha}$ - čas na 1 otačku po kružnici

$h = v_y\cdot t$

b) $h = \frac{2\pi R}{v\cdot\sin\alpha}\cdot v\cdot\cos\alpha = \underline{\underline{0{,}14\,m}}$

10-2 a)



$\Delta = d\cdot\sin\varphi$ $\Delta = m\cdot\lambda$

$\sin\varphi = \frac{m\cdot\lambda}{d}$ $\sin\varphi = \frac{1\cdot7\cdot10^{-7}}{3{,}3\cdot10^{-6}}\cdot m$

$\varphi = 90° \Rightarrow \sin\varphi = 1$

$m = 4{,}71$ - 4 řád

První souborná zkouška - FYZIKA

6-1

Dvě planparalelní vodivé desky mají vzájemnou vzdálenost d = 2 cm, rozdíl potenciálů mezi nimi je U = 120 V. Z povrchu desky o nižším potenciálu se uvolní elektron (počáteční rychlost elektronu se rovná nule). Určete
a) jaká bude rychlost tohoto elektronu po uražení vzdálenosti l = 3 mm,
b) s jakou rychlostí elektron dopadne na druhou desku.

Elektron se pohybuje ve vakuu. Je dána velikost náboje a hmotnosti elektronu: $e = 1{,}6.10^{-19}$ As, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg

(max. 8 bodů)

6-2

Elektron v atomu vodíku podle Bohrova modelu má nejnižší možnou energii (tj. atom je v základním stavu), pokud je na první dráze, charakterizované kvantovým číslem n = 1

a) Spočítejte poloměr dráhy tohoto elektronu a jeho rychlost
b) Určete vlnovou délku elektromagnetického záření, které emituje atom vodíku při přechodu elektronu ze třetí na druhou dráhu podle Bohrova modelu.

Jsou dány hodnoty fyzikálních konstant: $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, $e = 1{,}6.10^{-19}$ As, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $c = 3.10^8$ m/s, $\varepsilon_o = 8{,}8.10^{-12}$ F/m.

(max. 7 bodů)

$eU = \frac{1}{2} m_0 v^2 \Rightarrow v = 6{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$

$\frac{d_1}{d} = \frac{U_1}{U} \qquad U_1 = 18\,V \qquad v_1 = 2{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$

dm v jádru

6-1 $U = 120\,V$
$d = 2\,cm$
$v_1 = ?\ v_2 = ?$
$d_1 = 3\,mm \quad v_1 ?$
$d_2 = 20\,mm \quad v_2 ?$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$

$d\varphi = -\vec{E}\,d\vec{r}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E \cdot \cos\,dr = E \int_{r_1}^{r_2} dr = \underline{\underline{E \cdot d}}$

$E_k = qU \qquad E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

$v_2 = \underline{\underline{6{,}5 \cdot 10^6\,m/s}}$

intenzita pole mezi deskami je konst.

$\Delta\varphi_2 = E \cdot d$

$120 = E \cdot 20 \cdot 10^{-3} \Rightarrow E = 6000\,V/m$

Potenciál v bodě ve vzdál. 3 mm

$\varphi_3 - \varphi_1 = E \cdot d = 6000 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = \underline{18\,V}$

$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^6\,m/s}}$

6-2

$W_n = -\left(\frac{Z^2 \cdot e^4\, m}{8 \varepsilon_0^2 h^2}\right) \cdot \frac{1}{n^2}$ ... energie elektronu na kvantové dráze n
Ze = náboj jádra (pro H je Z = 1)

$F_d = F_{od}$

$m_e \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$

kvantová podmínka
$2\pi m v r_n = n h$

$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2 \Rightarrow$ pro $n = 1$ je $\underline{r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,m}$

$v_1 = \frac{\varepsilon_0 h}{2\pi r_1 m_e} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = 2{,}18 \cdot 10^6\,m\,s^{-1}$

$f = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \ldots$

$\lambda = \frac{c}{f}$

7.7.1998

8-2

a) Definujte logaritmický dekrement útlumu.

b) Hmotný bod vykonává tlumený kmitavý pohyb o kmitočtu $f = 1\ kHz$, logaritmický dekrement útlumu $\Lambda = 2.10^{-4}$. Určete, za jak dlouho poklesne energie kmitů hmotného bodu na jednu miliontinu.

$$\Lambda = \ln \frac{A_1}{A_2}$$

(max. 7 bodů)

$$A_1 = U_m e^{-at_1} \sin(\omega t_1 + \varphi_1)$$

$$A_2 = U_m e^{-a(t_1+T)} \sin(\omega t_2 + \varphi_1)$$

$$\frac{e^{-at_1}}{e^{-a(t_1+T)}} = e^{aT} = b \qquad \Lambda = \ln b = aT = \frac{a}{f} \Rightarrow a = f\Lambda$$

$$\frac{W_1}{W_n} = \frac{A_1^2}{A_n^2} = \frac{1}{10^{-6}} n = e^{2at_x} \qquad t_x = \frac{\ln n}{2a} = \frac{\ln n}{2f\Lambda} = \frac{6 \ln 10}{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}$$

$$= 15 \ln 10 = 34{,}54\,s$$

8-2 a)

$$\frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{C_0 \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)}{C_0 (e^{-\delta(t+T)}) \cdot \sin[(\omega(t+T) + \varphi)]}$$

$$\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T} = \frac{u(t)}{u(t+T)} = e^{\delta T} = \beta \text{ – útlum}$$

$$\boxed{\lambda = \ln \beta = \delta T}$$ logaritmický dekrement útlumu

8-2 b)

$f = 1\,kHz$

$\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$

$F = -k \cdot x_1$ – amplitude

$$W = \int_0^u F\,du = \int_0^u ku\,du = \frac{1}{2}ku^2$$

energie je funkcí kvadrátu amplitudy

$$\frac{W_1}{W_n} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{1^2}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6}}} = e^{\delta t_x} \Rightarrow$$

$$e^{t_x \lambda f} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}}$$

$$\lambda = \ln \beta = \delta T = \frac{\delta}{f} \Rightarrow \delta = \lambda f$$

$$t_x = \frac{\ln 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1k}$$

$t_x = 34{,}5\,s.$

21.11.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

7-1

a) Definujte fyzické kyvadlo!

b)Je dána homogenní přímá tyč o délce $l = 1\ m$. Určete, v jaké vzdálenosti x od středu tyče má být bod závěsu, aby se tyč zavěšená v tomto bodě kývala jako fyzické kyvadlo s minimální dobou kyvu. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose k ní kolmé a procházející těžištěm je $J_o = m\, l^2/12$.

(max. 8 bodů)

7-2

a) Formulujte a vysvětlete vztahy, popisující vyzařování absolutně černého tělesa.

b) Z Planckova vztahu pro spektrální hustotu zářivosti

$$H_{e\lambda} = f(\lambda, T) = C_1/\lambda^5(\exp(C_2/\lambda T) - 1)$$

odvoďte Stefanův - Boltzmannův zákon.

(max. 7 bodů)

$$\omega_0^2 = \frac{mgx}{J_0 + mx^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\text{—}\right) = \frac{mg(J_0 + mx^2) - 2m^2gx^2}{(\ )^2} = 0 \Rightarrow J_0 = mx^2$$

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$$H_{0\lambda} = \frac{dH_0}{d\lambda}$$

$$H_0 = +\int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}\, d\lambda = -\int_\infty^0 \frac{c_1 T^5 x^5}{c_2^5} \frac{1}{e^x - 1} \frac{c_2}{Tx^2}\, dx =$$

$$\frac{c_2}{\lambda T} = x \qquad \lambda = \frac{c_2}{Tx}$$

$$d\lambda = -\frac{c_2}{Tx^2}\, dx$$

$$= \frac{c_1 T^4}{c_2^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

$$\sigma = \frac{c_1 \pi^4}{15 c_2^4}$$

$$c_1 = \frac{2\pi h c^2}{1}$$

$$c_2 = \frac{hc}{k}$$

$$\frac{c_1}{c_2^4} = \frac{2\pi h c^2 k^4}{h^4 c^4} = \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2}$$

7-1 a) Hmotný bod který se kývá kolem osy neprocházející těžištěm

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mgh}}}$$ ramena

moment setrvačnosti

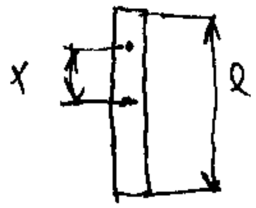
$J = J_0 + mx^2$ ⟸ translace

moment setrvačnosti celé tyče v těžišti

b) $l = 1\,m$

$J_0 = \frac{ml^2}{12}$

$x = ?$



$J = J_0 + mx^2$

$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + mx^2}{mgx}}$$

$$T = 2\pi \left(\frac{ml^2}{mgx \cdot 12} + \frac{mx^2}{mgx} \right)^{+\frac{1}{2}} = 2\pi \left(\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T' = \quad -x^{-2} \cdot \frac{l^2}{12g} + \frac{1}{g} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{extrém}$$

$$\frac{l^2}{12gx} = \frac{1}{g} \Rightarrow 12x^2 = l^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{l^2}{12}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{12}}\, l}}$$

1. státní zkouška

FYZIKA

5-1

Mezi dvě rovinné rovnoběžné desky vletí elektron rychlostí v_0 ve směru jejich délky rovnoběžně s deskami. Napětí na deskách je U = 300 V, vzdálenost desek je b = 2 cm a jejich délka je d = 10 cm. Určete

a) po jaké dráze se bude elektron pohybovat,

b) maximální hodnotu rychlosti v_0, při níž elektron, který vletěl mezi desky ve stejné vzdálenosti od obou, ještě neopustí prostor mezi deskami (tj. dopadne na jednu z desek - při větší rychlosti by již vylétl ven do volného prostoru).

Je dána hmotnost elektronu $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg a jeho náboj $e = 1{,}6.10^{-19}$ As.

(max. 8 bodů)

5-2

a) Jaký je vztah mezi svítivostí a světelným tokem?

b) Vodorovný kulatý stůl o průměru 2 m je osvětlen žárovkou umístěnou v závěsu nad středem stolu. Jaká je výška umístění žárovky nad stolem, při níž je osvětlení plochy, nacházející se při okraji stolu, maximální?

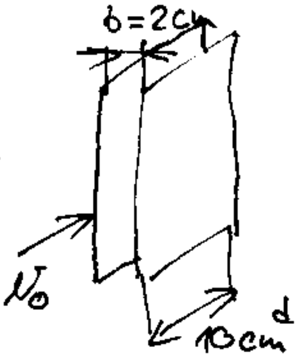
Žárovku pokládejte za bodový všesměrový zdroj, odrazy světla od stropu atd. zanedbejte.

(max. 7 bodů)

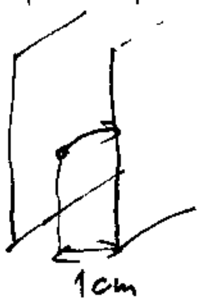
5-1 $U = 300\,V$

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$

$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$



a) po parabole



$W = qU \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad v_0$

$qU = \frac{1}{2} m v^2$

$F = q \cdot E \qquad F = m \cdot a \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr$

$q \cdot E = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = E \cdot d$

$E = \frac{\Delta\varphi}{d} = \frac{300}{0{,}02} = 15\,\frac{kV}{m}$

$\varphi_{1cm} = E \cdot d = 15\,kV \cdot 1\,cm = 150\,V$

$s = \frac{1}{2} a t^2 \qquad a = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 15 \ldots}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 2{,}63 \cdot 10^{15}$

doba za kterou dopadne elektron na desku

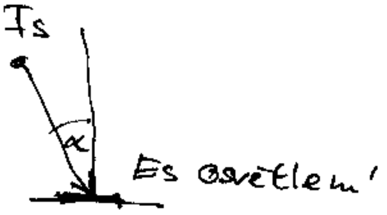
$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \qquad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}01}{2{,}63 \cdot 10^{15}}} = 2{,}75 \cdot 10^{-9}\,s$

a za tuto dobu nesmí překonat vzdálenost 10cm

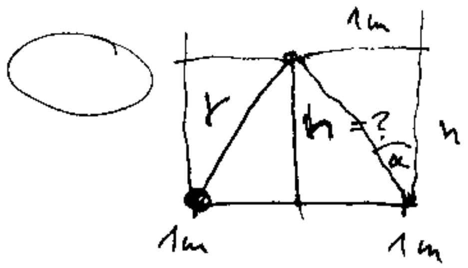
$s = v_0 t \Rightarrow v_0 = \frac{s}{t} = \frac{0{,}1}{2{,}75 \cdot 10^{-9}} = 36{,}36 \cdot 10^{6}\,m/s$

5-2 a) Svítivost je def. jako podíl světelného toku a prostorového úhlu

$$\boxed{I_s = \frac{d\Phi}{d\Omega}} \quad [cd]$$



b) d = 2m



$$\boxed{E_s = \frac{I_s}{r^2} \cdot \cos\alpha}$$

$r^2 = 1^2 + h^2$

$r = \sqrt{1 + h^2}$

$\cos\alpha = \frac{h}{r}$

$$E_s = \frac{I_s}{(\sqrt{1+h^2})^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}$$

$$E_s = \frac{I_s \cdot h}{\sqrt{(1+h)^3}}$$

$E_s' \overset{!}{=} 0$ max podle h

A 1. a) Určete, jak závisí tíhové zrychlení na výšce nad povrchem Země

b) V jaké výšce nad povrchem Země je tíhové zrychlení rovno polovině jeho hodnoty na povrchu Země? (R_Z= 6380 km)

2. a) Jak závisí osvětlení na vzdálenosti od zdroje světla?

b) Stůl je osvětlen dvěma žárovkami, jež jsou umístěny ve výšce h = 2 m nad stolem ve vzájemné vzdálenosti d = 1 m od sebe. Jak velké je osvětlení E na stole v místě uprostřed mezi svislými průměty obou žárovek? Svítivost každé ze žárovek je I = 200 cd. Žárovky pokládejte za bodové všesměrové zdroje

7.7.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

8-1
Telekomunikační družice obíhá okolo Země po stacionární kruhové dráze, tzn. že její doba oběhu je 24 *h*. Určete
a) v jaké vzdálenosti od povrchu Země obíhá,
b) jaká je velikost rychlosti jejího pohybu.
Je zadán poloměr Země R = 6370 *km* a tíhové zrychlení při povrchu Země g = 9,81 $m\,s^{-2}$

(max. 8 bodů)

I 1. Izolovaná kulička o průměru d = 3 cm je dostatečně daleko od ostatních předmětů a je nabita na potenciál U = 6000 V vzhledem k nekonečnu. Vypočtěte intenzitu elektrického pole

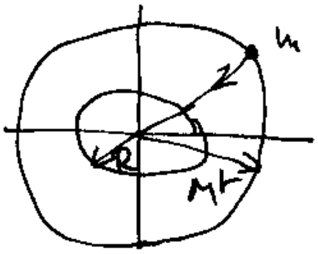
a) v blízkosti jejího povrchu

b) ve vzdálenosti a = 18,5 cm od jejího povrchu

2. a) Kdy se pozoruje Dopplerův jev?

b) Určete rychlost, s níž se vzdaluje od pozemského pozorovatele hvězda, v jejímž spektru je čára sodíku (jmenovitá vlnová délka λ = 422,7 nm) posunuta o $\Delta\lambda$ = 0,341 nm směrem k červenému konci spektra (c = 3.10^8 m/s)

8-1



$$\boxed{F_g = \varkappa \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}} \qquad \varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

$$\boxed{F_n = m \cdot \frac{v^2}{r}}$$

$$\varkappa \frac{m M}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$R = 6370\,km$

$g = 9{,}81\ m/s$

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{M}{r}} \qquad \boxed{g = \varkappa \frac{M}{R_z^2}}$$

$$v = \sqrt{g \cdot R_z} = \underline{\underline{7905\ m/s}} \qquad T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\underline{\underline{T = 5065\ s}}$$

A 1 a) $g_0 = \varkappa \cdot \frac{M}{r^2} = \varkappa \frac{M}{(R_z+h)^2}$

A 1 b)

$$\cancel{\varkappa} \frac{\cancel{M}}{R_z^2} = 2 \cdot \cancel{\varkappa} \frac{\cancel{M}}{(R_z+h)^2} \Rightarrow \underbrace{(R_z+h)}_{r^2}{}^2 = 2 R_z^2$$

$$R_z^2 + 2R_z h + h^2 = 2R_z^2 \qquad r = 9022 \qquad r^2 = 2R_z^2$$

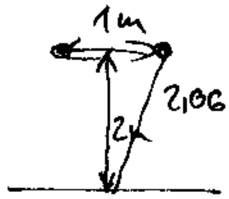
$$r = \sqrt{2R_z^2}$$

$$h^2 + 2R_z h = R_z^2 \qquad h^2 + 2 \cdot 6380\, h - 6380^2 = 0$$

$$\underline{\underline{h = 2644\ km}}$$

A 2 a) $E_s = \frac{I_s}{r^2} \cos\alpha$

A 2 B



$$\cos\alpha = \frac{0{,}5}{2{,}06} = 0{,}24$$

$$E_s = \frac{200}{2{,}06^2} \cdot 0{,}24 \cdot 2$$

$$\underline{\underline{E_s = 22{,}6}}$$

11 a)

$d = 3\,cm \quad U = 6\,kV$

$r = 1{,}5\,cm \qquad a_1 = 18{,}5$ od povrch

$a' = 20\,cm$ od středu

$\cancel{E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad E = ? \qquad \oint \vec{D}\, d\vec{S} = Q$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi = -\int E\,dr + k = -\int E\,dr + k = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k$$

$$\varphi(\infty) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\varphi(1{,}5) = 6000 = \frac{Q}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}015} \Rightarrow Q = 10 \cdot 10^{-9}\,C$$

$$E_{(1{,}5)} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0{,}015^2} = 400\,\frac{kV}{m} \qquad E_{(20\,cm)} = \frac{10 \cdot 10^{-19}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0{,}20^2} = 2250\,\frac{V}{m}$$

D

1 a) Za jakých podmínek platí zákony zachování energie a hybnosti pro mechanickou soustavu?

8 bodů b) Neutron o kinetické energii E = 1 MeV se centrálně srazil s jádrem uhlíku $^{12}_{6}C$ a odrazil se od něj nazpět. Jak velká je kinetická energie takto odraženého neutronu? Předpokládejte, že se jedná o dokonale pružnou srážku

2 a) Formulujte Stefanův - Boltzmannův zákon

7 bodů b) Jak velký povrch má topné těleso o výkonu P = 1000 W, je-li jeho povrchová teplota rovna t = 770°C? Předpokládejte, že září jako absolutně černé těleso, nezářivé formy přenosu energie zanedbejte ($\sigma = 5{,}7.10^{-8}\ W/m^2K^4$)

H

1. Teplota páry, která jde z kotle (ohříváku) do tepelného stroje, je t_1= 210°C. Teplota kondenzátoru (chladníku) je t_2= 40°C.
   a) Určete, jaká je maximální teoretická účinnost tohoto tepelného stroje
   b) Určete, jaké minimální množství tepla odevzdá tento tepelný stroj do kondenzátoru (chladníku), odebere-li z dodané páry teplo Q = 1000 J

2. a) Závisí doba kmitu matematického kyvadla na jeho hmotnosti?
   b) Dvě matematická kyvadla byla současně uvedena do pohybu. Za dobu 15 kmitů prvního kyvadla vykonalo druhé kyvadlo právě 10 kmitů. Určete, v jakém poměru jsou délky obou kyvadel

D 1. a) izolovaná soustava (nepůsobí vnější síly, žádná přeměna na jiné formy energie)

D 1. b) m = hmotnost protonu = hmotnost neutronu

12m = hmotnost jádra $^{12}_{6}C$ (12 nukleonů (protonů + neutronů))

$$\left.\begin{aligned} \cancel{m}v &= -\cancel{m}v' + 12\cancel{m}u \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v^2 &= \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}12\cancel{m}u^2 \end{aligned}\right\} = \quad \cancel{v = -v' + 12} \quad \cancel{v^2 = v'^2} + u^2 \quad \begin{aligned} v &= -v' + 12u \\ v^2 &= v'^2 + 12u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v + v' &= 12u \\ v^2 - v'^2 &= 12u^2 \end{aligned} \qquad \text{dělením} \qquad v - v' = u$$

$$v + v' = 12v - 12v'$$

$$v' = \frac{11}{13}v \quad (v' = 0{,}846\,v)$$

$W_k = \frac{1}{2}mv^2$ počáteční

$$W_k' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{11}{13}\right)^2 v^2 = \frac{11}{13}W_k = 0{,}716\,W_k$$

$$W_k' = 0{,}716\,\text{MeV}$$

D2 a) $\boxed{H_e = \sigma T^4}$ H_e je výkon vyzářený z $1\,m^2$ absolutně černého tělesa o teplotě T

D2 b) $T = 770 + 273 = 1043\,K$

$$S \cdot H_e = P \Rightarrow S = \frac{P}{H_e} = \frac{P}{\sigma T^4} = \frac{10^3}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 1043^4} = 0{,}01484\,m^2$$

H1 a) $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 35{,}19\,\%$ $\quad T_1 = 483{,}15\,K$, $T_2 = 313{,}15\,K$

H1 b) $\eta = \frac{Q - Q_0}{Q}$ $\quad Q$ – teplo odebrané ohřívači, Q_0 – teplo předané chladiči

$$0{,}3519 = \frac{1000 - Q_0}{1000} = 648{,}14\,J$$

H2 a) a) NE

H2 b) $T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$ $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ $\qquad 15 \cdot T_1 = 10\,T_2$

$$\frac{15}{10} = \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = (1{,}5)^2 = 2{,}25 \quad \text{nebo} \quad \frac{l_1}{l_2} = 0{,}44\overline{4}$$

F E 3 1. a) Definujte moment síly vzhledem k bodu

5 b) Kolo setrvačníku o momentu setrvačnosti $J = 80 \text{ kg m}^2$ je roztáčeno ze stavu klidu otáčivým momentem, který roste s časem lineárně tak, že v čase $t_0 = 0$ je otáčivý moment roven nule a v čase $t_1 = 100$ s dosáhne hodnoty $M_1 = 500$ Nm. Jaká je frekvence otáčení kola setrvačníku v čase t_1?

8 bodů

3 2. a) Určete vztah mezi jednotkami pro energii: elektronvoltem a joulem

4 b) Jakou vlnovou délku má foton, jehož hmotnost se rovná klidové hmotnosti elektronu m_e? ($m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $c = 3.10^8$ m/s, $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C)

7 bodů

E 2. a) $eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

b) $h\nu = m_0 c^2$

$\nu\lambda = c$ $\qquad \frac{h \cdot c}{\lambda} = m_0 c^2$

$\nu = \frac{c}{\lambda}$

$\frac{h}{\lambda} = m_0 c$

$\lambda = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = \frac{6{,}6}{9{,}1 \cdot 3} 10^{-11} =$

$= 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ m

$= 2{,}42 \cdot 10^{-3}$ nm

1 a) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

1b) $J = 80 \ kgm^2$ $\qquad \varepsilon = \frac{\omega}{t}$

$t_0 = 0 \qquad M_0 = 0 \qquad \omega_{t_1} = ?$

$t_1 = 100 s \quad M_1 = 500 \ Nm$

$\boxed{J \cdot \vec{\varepsilon} = \Sigma \vec{M}} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{\omega}{t}}$

$J \frac{\omega}{t} = M \Rightarrow \omega = \frac{M}{J} \cdot t = \underline{\underline{625 \ rad/s}}$

2a) $1eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19} J$

2b) $\boxed{h \cdot \nu = m_0 c^2}$

$h \cdot \frac{c}{\lambda} = m_0 c^2$

$\boxed{\lambda = \frac{h}{m_0 c}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \quad \lambda = 2{,}42 \cdot 10^{-12} m$

Příklady k PSZ dne 13.7.1993 a jejich řešení:

1) Jeden mol kyslíku O_2 je uzavřen v nádobě o má teplotu $t = 27^\circ C$.
   a) Určete jeho vnitřní energii při této teplotě
   b) Určete střední energii translačního pohybu jedné molekuly kyslíku při této teplotě ($k=1,38.10^{-23}$ J/K, $R=8,3$ J/K.mol)

Řešení:

2 atomový plyn

a) W=i. $= i\frac{1}{2}RT$ $i=5$

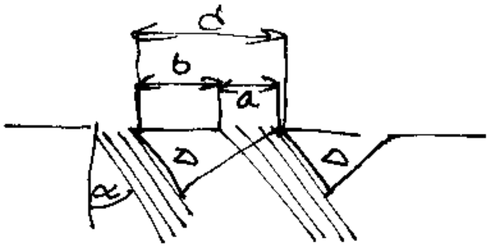
$$W_k = \frac{5}{2} nRT = 6,225 kJ$$

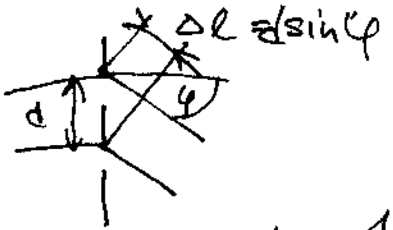
$= \frac{5}{2}RT$ $6,23$ kJ

$$\bar{W}_t = \frac{3}{2}kT = 6,21\,10^{-21}\,J \ (= 0,039\,eV)$$

2) a) Načrtněte chod paprsků při průchodu světla optickou mřížkou
   b) Kolmo na rovinu optické difrakční mřížky, která má n = 500 vrypů na milimetr, dopadá paprsek He-Ne laseru o vlnové délce = 633 nm. Určete, pod jakými úhly se odklánějí paprsky laseru po průchodu touto mřížkou

Řešení:





$$d = \frac{1\,mm}{500} = 2\,10^{-6}$$

$n = 500 / 1\,mm$ $\lambda = 633\,nm$

$$\sin\varphi = \frac{m\cdot\lambda}{d}$$

$$\sin\varphi = \frac{1 \cdot 6,33 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-6}}$$ (2)

$\varphi_1 = 18^\circ 27'$

$\varphi_2 = 39^\circ 16'$

$18^\circ 27'$

$2\,10^{-6}$ m

$0,633\,10^{-6}$ m

$= m \cdot 0,3165$

$39^\circ 16'$

$= \pm 71^\circ 42'$

První souborná zkouška - FYZIKA 8.7.1999

15.1

Těleso urazilo volným pádem (bez tření) dráhu h.

a) Rozdělte tuto dráhu na 5 částí, které mají tu vlastnost, že doba potřebná k jejich proběhnutí byla ve všech případech stejná.

b) Čemu se rovná tato doba?

Odpor prostředí neuvažujte. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ m\ s^{-2}$

(max. 8 bodů)

15.2

a) Popište jev interference světla a vysvětlete jeho příčiny.

b) Sluneční světlo se odráží pod úhlem $\alpha = 45°$ od tenké vrstvy oleje plovoucí na hladině vody. Spočítejte, které vlnové délky světla ve viditelné oblasti jsou v odraženém světle nejvíce zesíleny. Tloušťka vrstvy $d = 1\ \mu m$, index lomu oleje $n_o = 1{,}45$ a index lomu vody $n_v = 1{,}33$. Viditelné světlo má vlnové délky od $450\ nm$ do $720\ nm$.

(max. 7 bodů)

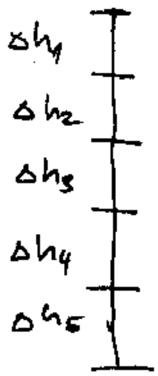
Příklady řešte napřed obecně, pak dosaďte číselné hodnoty (pokud byly zadány); výsledky vyznačte dvojitým podtržením. U výsledků vždy napište i jejich rozměr v jednotkách soustavy SI.

Některé základní fyzikální konstanty

Planckova konstanta	$h = 6{,}63.10^{-34}\ J.s$	*náboj elektronu*	$e = 1{,}6.10^{-19}\ A.s$
gravitační konstanta	$\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$	*klidová hmotnost elektronu*	$m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$
rychlost světla ve vakuu	$c = 3{,}00.10^{8}\ m/s$	*klidová hmotnost protonu*	$m_p = 1{,}67.10^{-27}\ kg$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38.10^{-23}\ J/K$	*molární plynová konstanta*	$R_m = 8{,}3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022.10^{23}\ mol^{-1}$	*Stefanova-Boltzmannova konst.*	$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$

6.7.1999

15-1.



$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t$$

$$h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 + \Delta h_5 = \frac{1}{2} g (5 \cdot t_0)^2$$

$$\Rightarrow t_0^2 = \frac{2h}{g \cdot 25} \Rightarrow$$

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{h}{25}$$

$$\Delta h_2 = h(2t_0) - h(t_0) = \frac{1}{2} g (2t_0)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{3h}{25}$$

$$\Delta h_3 = h(3t_0) - h(2t_0) = \frac{1}{2} g (3t_0)^2 - \frac{1}{2} g (2t_0)^2 = \frac{5h}{25}$$

17.9.1998

První souborná zkouška - FYZIKA

3-1

Setrvačník, jehož moment setrvačnosti je $J = 2\ kgm^2$, se otáčí okolo své osy s frekvencí 30 otáček za sekundu. V čase $t = 0$ začne na setrvačník působit časově proměnný brzdicí silový moment daný vztahem

$$M = k\,t^2 \qquad \text{kde} \quad k = 4\ Nm/s^2$$

Určete

a) za jak dlouhou dobu se setrvačník zastaví,

b) kolik otáček přitom vykoná.

(max. 8 bodů)

3-2

Stavy elektronů v elektronovém obalu atomu jsou dány kvantovými čísly n, l, m a m_s

a) Jaké fyzikální veličiny tako kvantová čísla popisují, jakých hodnot mohou nabývat?

b) Jaký je v atomu maximálně možný počet elektronů, které mají hlavní kvantové číslo $n = 4$?

(max. 7 bodů)

3.1 17.9.1998

$J \cdot \varepsilon = M$ $J = 2\,kg\,m^3$

30 ot/s $M = kt^2$, $k = 4\,Nm/s^2$

$f = \frac{1}{T} = s^{-1} = H$ $v = a \cdot t$ $\omega = \varepsilon \cdot t$

$f = \frac{1}{30}$ $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{30}$ $J \cdot \varepsilon = M$

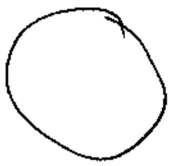
$\varepsilon = \frac{M}{J}$

$\frac{\omega}{t} = \frac{M}{J} \Rightarrow \cancel{t = \frac{J \cdot \omega}{M}}$

$\cancel{\frac{\omega}{t} = \frac{kt^2}{J}}$ a) $\cancel{t = 2 \cdot \frac{\frac{2\pi}{30}}{4}}$

$\cancel{\omega J = kt^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{\omega J}{k}}}$ $t = \sqrt[3]{\frac{\frac{2\pi}{30} \cdot 2}{4}} = \underline{\underline{0{,}47\,s}}$

b)



$f = \frac{30}{1}\,Hz$ $s = \frac{1}{2}at^2$ $\omega = \frac{\varphi}{t}$

$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ $\varphi = \omega t$

počet. otáček $= \frac{\varphi}{2\pi}$ $v = \frac{s}{t}$

$J \cdot \vec{\varepsilon} = \int_0^t kt^2\,dt$ $\omega = 2\pi \cdot 30$ $s = v \cdot t$

$J \cdot \varepsilon = k\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t$ $J \cdot \varepsilon = k\left[\frac{t^3}{3} - 0\right] = k\frac{t^3}{3}$

$J \cdot \frac{\omega}{t} = k\frac{t^3}{3}$

$J \cdot \omega = k\frac{t^4}{3} \Rightarrow t = \sqrt[4]{\frac{3J\omega}{k}}$

$t = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot 2\pi \cdot 30}{\cancel{4}}} = 4\,s.$ $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ $\varphi = \frac{1}{2}\frac{\omega}{t}t^2$

$\varphi = \frac{1}{2}\omega t$

$\varphi = 386$

$n = \frac{386}{2\pi} = \underline{\underline{61\ otáček}}$

3-2. F2 - str 131

a) n - hlavní kvantové číslo - udává energii kvantového stavu
$n = 1, 2, 3 \ldots$

l - vedlejší - kvanta momentu hybnosti
$l = 0, 1, 2, \ldots n-1$

m - magnetické - prostorová orientace orbitalu
$-l \ldots l$

ms - spinové - určuje směr otáčení elektronu
$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

b) $n = 4$

$2(2l+1)$

	l	
s	0	$2(2 \cdot 0+1) = 2$
p	1	$2(2 \cdot 1+1) = 6$
d	2	$2(2 \cdot 2+1) = 10$
f	3	$2(2 \cdot 3+1) = 14$

8.7.1997

První souborná zkouška - FYZIKA

9-1

Po nakloněné rovině o délce $s = 5\ m$ se začne z jejího horního konce v čase $t = 0$ valit (bez smyku) homogenní těleso tvaru plného válce. Měřením bylo zjištěno, že doba, během níž těleso projde po celé délce nakloněné roviny, je $t = 2\ s$. Určete

a) Jaká je rychlost pohybu těžiště válce na konci dráhy,

b) jaký úhel svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou.

(Moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho rotační ose je roven $J_o = m R^2 /2$, kde m je hmotnost válce a R jeho poloměr.)

(max. 8 bodů)

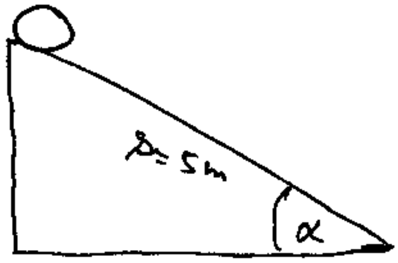
9-2

a) Popište Carnotův tepelný stroj. Jaká je významná vlastnost tohoto stroje?

b) Spočítejte změny entropie ideálního plynu v jednotlivých částech Carnotova cyklu a vysvětlete, proč je celková změna entropie za celý cykl rovna nule.

(max. 7 bodů)

a-1 $\quad$ 8.7.1997



$t = 5\,s$

$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}$

$J = J_0 + J$

$J = m\frac{R^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} m R^2$

$\cancel{\sin\alpha = \frac{F_g}{F}}$

$\sin\alpha = \frac{F}{F_g} \Rightarrow F = mg \cdot \sin\alpha$

$M = R \cdot mg \sin\alpha$

$J \cdot \varepsilon = M$

$\varepsilon = \frac{\cancel{R}\,\cancel{m}g \cdot \sin\alpha}{\frac{3}{2}\cancel{m} R^{\cancel{2}}} = \frac{2 g \sin\alpha}{3 \cdot R}$

$a_t = \varepsilon \cdot R$

$a_t = \frac{2}{3} g \sin\alpha$

$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a_t = \frac{2s}{t^2}$

$\sin\alpha = \frac{3}{2}\frac{a_t}{g}$

$\cancel{v = \frac{1}{2} a t}$

$a_t = \frac{2 \cdot 5}{5^2} = 0{,}4 \frac{m}{s^2}$

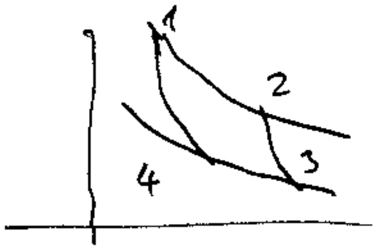
$\sin\alpha = 0{,}3$

$v = a \cdot t$

b) $\alpha = 17^\circ$.

a) $v = 2\,m/s$

9-2 a)



$$\Delta S_{23} = \Delta S_{41} = 0$$

$$\Delta S_{12} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S_{34} = nR \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$$

$$\ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \frac{V_4}{V_3} = 0 \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Protože plyn se vrátí po skončení děje do výchozího stavu musí být celková změna entropie nulová

První souborná zkouška - FYZIKA **16.9.1999**

12.1

Homogenní koule se kutálí bez prokluzování po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30°$. Určete

a) jakou rychlostí se bude pohybovat těžiště koule po proběhnutí dráhy $l = 5\ m$,

b) v jakém poměru je tato rychlost k rychlosti, kterou by se pohybovalo těžiště uvedené koule, kdyby se koule po nakloněné rovině smýkala bez tření

Moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose, která prochází jejím středem, je roven $J_0 = 2/5\ mR^2$. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ m\ s^{-2}$

(max. 8 bodů)

12.2

a) Pojednejte o vnitřní energii a entropii v termodynamice.

b) Jak se změní entropie, smísí-li se 2 *kg* vody o teplotě 50 *°C* s 5 *kg* vody o teplotě 15 *°C*?

Je dáno měrné teplo vody $c = 4200\ J/kg.K$

(max. 7 bodů)

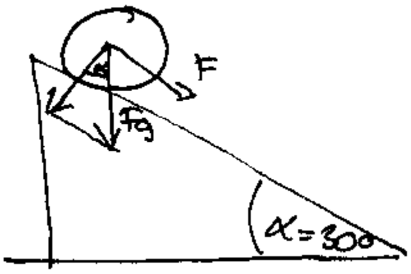
Příklady řešte napřed obecně, pak dosaďte číselné hodnoty (pokud byly zadány); výsledky vyznačte dvojitým podtržením. U výsledků vždy napište i jejich rozměr v jednotkách soustavy SI.

Některé základní fyzikální konstanty

Planckova konstanta	$h = 6{,}63.10^{-34}\ J.s$	*náboj elektronu*	$e = 1{,}6.10^{-19}\ A.s$
gravitační konstanta	$\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$	*klidová hmotnost elektronu*	$m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$
rychlost světla ve vakuu	$c = 3{,}00.10^8\ m/s$	*klidová hmotnost protonu*	$m_p = 1{,}67.10^{-27}\ kg$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38.10^{-23}\ J/K$	*molární plynová konstanta*	$R_m = 8{,}3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022.10^{23}\ mol^{-1}$	*Stefanova-Boltzmannova konst.*	$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$

12-1

16. 9. 1999



$v = ?$ po $l = 5\,m$

$J_0 = \frac{2}{5} m R^2 \quad g = 10\, m s^{-2}$

$F = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$M = F \cdot r = m g r \sin\alpha$

$J = m R^2 + \frac{2}{5} m R^2 = \frac{7}{5} m R^2$

$\varepsilon J = M$

$\varepsilon \cdot \frac{7}{5} \cancel{m} R^{\cancel{2}} = \cancel{R}\cancel{m} g \sin\alpha$

zrychlení celého tělesa

$\varepsilon = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{\frac{7}{5} R} \Rightarrow a_t = \varepsilon \cdot R = a$

$a = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{\frac{7}{5} \cancel{R}} \cdot \cancel{R} = \dfrac{25}{7}$

$v = a \cdot t$

$s = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} \Leftarrow t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5}{\frac{25}{7}}} = \sqrt{\dfrac{14}{5}}$

$t = 1{,}67\, s$

$\underline{\underline{v = 5{,}97\, m/s}}$

bez tření

$J = m R^2$ pouze

$\varepsilon = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{R} \Rightarrow a_t = g \cdot \sin\alpha = 0{,}5$

$t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5}{0{,}5}} = \sqrt{5} = 2{,}23\, s$

$v = a \cdot t = 0{,}5 \cdot 2{,}23 = \underline{\underline{1{,}11}}\ m/s$

12-2 $m_1 = 2\,kg$ $m_2 = \cancel{1kg}\ 5\,kg$

$T_1 = 50^\circ C = 323$ $T_2 = 15^\circ C = 288\,K$

$$T(m_1 + m_2) = T_1 \cdot m_1 + T_2 \cdot m_2 \Rightarrow T = 298$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad Q = mc \cdot \Delta T$$

$$dQ = mc \cdot dT$$

$$dS = \frac{mc\,dT}{T} \Rightarrow \Delta S = mc \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

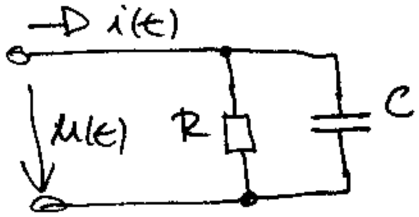
$$\Delta S = m_1 c \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c \cdot \ln \frac{T}{T_2} = 40 \frac{J}{K}$$

Entropie – míra neuspořádanosti systému
– pro vratné děje $\Delta S = 0$
– pro nevratné entropie roste

Teorie obvodů

př $i(t) = 0{,}05 + 0{,}1 \sin(1000t)$ A $R = 200\,\Omega$ $C = 5\,\mu F$

7.7.98



$u(t) = ?$

stejnosm. složka

$U = I \cdot R = 0{,}05 \cdot 200 = 10\,V$

HUS:

$$Z = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{\cancel{j\omega C}}}{\frac{1 + j\omega RC}{\cancel{j\omega C}}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$Z = \frac{200}{1 + j \cdot 1000 \cdot 200 \cdot 5\,\mu F} = \frac{200}{1 + j} = \frac{200}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} j}} = 141{,}42 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

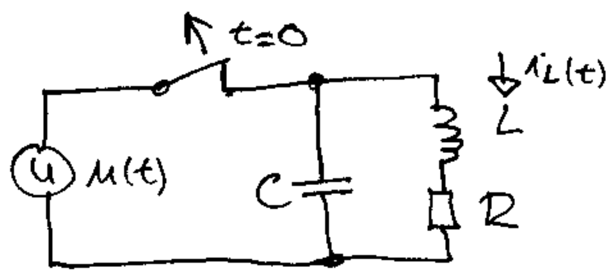
$$U = I \cdot Z = 0{,}1 \cdot 141{,}42 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = 14{,}142 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\,V$$

$$u(t) = 10 + 14{,}42 \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right)\,V$$

---

př

7.7.98



$u(t) = 10 \cdot \sin(5000t)$

u HUS u pro $t<0$

průběh $i_L(t)$ pro $t>0$

$R = 2500\,\Omega$

$C = 0{,}25\,\mu F$

$L = 0{,}25\,H$

Pro $t<0$ je obvod v HUS, určíme časový průběh proudu $i_L(t)$ pro $t<0$

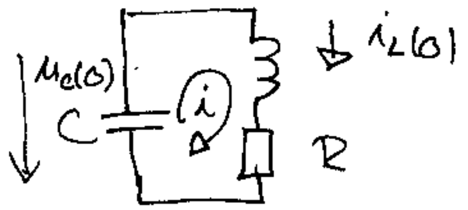
HUS $U = 10\,V$

$$Z = R + j\omega L = 2500 + 1250j = 2795 \cdot e^{0{,}4636j}\,\Omega$$

$$I_L = \frac{U}{Z} = \frac{10}{2795} \cdot e^{-0{,}4636j} = 0{,}003578 \cdot e^{-0{,}4636j}\,A$$

$$i_L(t) = 0{,}003578 \cdot \sin(5000t - 0{,}4636)\,A$$

u case $t=0$



$u_C(0) = u(0) = 10 \cdot \sin 0 = 0\,V$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - u_{c(0)} + L\frac{di}{dt} + R\cdot i = u_1 \;\Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{C} i + L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-10000 \pm \sqrt{10^8 - 4 \cdot 16 \cdot 10^6}}{2} \qquad r^2 + 10000\,r + 16\cdot 10^6 = 0$$

$r_1 = -2000 \quad r_2 = -8000$

$$\underline{i(t) = k_1 \cdot e^{-2000t} + k_2 \cdot e^{-8000t}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{C}\int_0^0 i\,dt}_{0} - \underbrace{u_C(0)}_{0} + L\,i'(0) + R\,i(0) = \underset{0}{u_1}$$

$i(0) = 0{,}003578 \cdot \sin(-0{,}4636)$ A
$= -0{,}0016$ A

$+L\,i'(0) + R\,i(0) = 0$

$-0{,}0016 = k_1 + k_2 \Rightarrow \underline{k_1 = -k_2 - 0{,}0016}$

$+L\,i'(0) = -R\,i(0)$

$i'(t) = -2000\,k_1 \cdot e^{-2000t} - 8000\,k_2 \cdot e^{-8000t}$

$$i'(0) = \frac{-2500 \cdot (-0{,}0016)}{0{,}25} = 16\,A = -2000\,k_1 - 8000\,k_2$$

$8000\,k_2 = -2000k_1 - 16$

$$k_2 = \frac{-2000k_1 - 16}{8000} = -0{,}25k_1 - 0{,}002$$

$k_1 = 0{,}25k_1 + 0{,}002 - 0{,}0016$

$0{,}75k_1 = 0{,}0004$

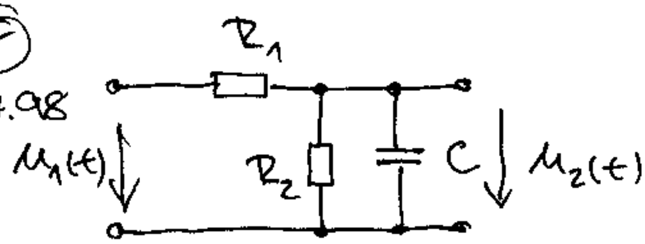
$k_1 = 0{,}000533$

$k_2 = -0{,}002183$

$$\underline{i_L(t) = [0{,}000533 \cdot e^{-2000t} - 0{,}002183 \cdot e^{-8000t}]\,A}$$

(7F)

18.4.98



$u_1(t) = 5 + 10 \cdot \sin(1000t)$

$u_2(t) = ?$

$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 200\,\Omega \quad C = 15\,\mu F$

stejnosměrná složka:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3{,}33\,V$$

$$Z = R_1 + \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{\frac{R_2}{\cancel{j\omega C}}}{\frac{1 + j\omega C R_2}{\cancel{j\omega C}}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} =$$

$$Z = 100 + \frac{200}{1 + j \cdot 1000 \cdot 15\mu \cdot 200} = 100 + \frac{200}{1 + 3j} = \frac{100 + 300j + 200}{1 + 3j} =$$

$$Z = \frac{300 + 300j}{1 + 3j} = \frac{424 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}}{3{,}16 \cdot e^{1{,}249j}} = 134{,}16\,e^{-0{,}4636j}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{134{,}1 \cdot e^{-0{,}4636j}} = 0{,}0745 \cdot e^{0{,}4636j}$$

$$Z_1 = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} = \frac{200}{1 + 3j} = 63{,}245 \cdot e^{-1{,}249j}$$

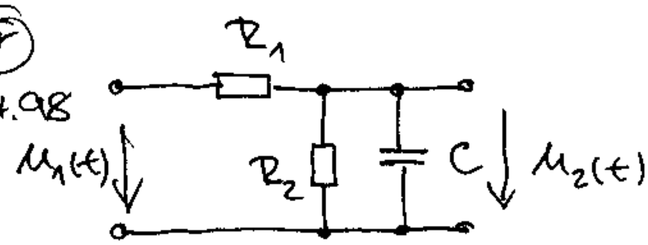
$$U_2 = Z_1 \cdot I = 4{,}71\,e^{-0{,}7854}\,V$$

$$u_2(t) = 3{,}33 + 4{,}71 \cdot \sin(1000t - 0{,}7854)\,V$$

$$u_{2ef} = \sqrt{3{,}33^2 + \frac{1}{2} 4{,}71^2} = \underline{\underline{4{,}714\,V}}$$

(17F)

18.4.98



$u_1(t) = 5 + 10 \cdot \sin(1000t)$

$u_2(t) = ?$

$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 200\,\Omega \quad C = 15\,\mu F$

stejnosměrná složka:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3{,}33\,V$$

$$Z = R_1 + \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{\frac{R_2}{\cancel{j\omega C}}}{\frac{1 + j\omega C R_2}{\cancel{j\omega C}}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} =$$

$$Z = 100 + \frac{200}{1 + j\,1000 \cdot 15\mu \cdot 200} = 100 + \frac{200}{1+3j} = \frac{100 + 300j + 200}{1+3j} =$$

$$Z = \frac{300 + 300j}{1+3j} = \frac{424 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}}{316 \cdot e^{1{,}249j}} = 134{,}16\,e^{-0{,}4636j}$$

$$\cancel{I = \frac{I}{G}} \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{134{,}1 \cdot e^{-0{,}4636j}} = 0{,}0745 \cdot e^{0{,}4636j}$$

$$Z_1 = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} = \frac{200}{1+3j} = 63{,}245 \cdot e^{-1{,}249j}$$

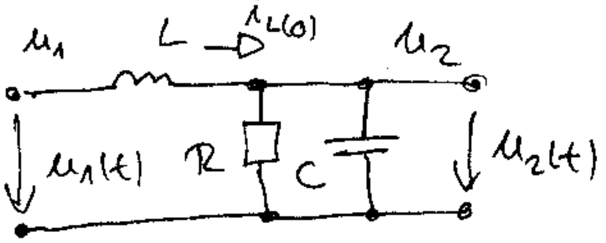
$$U_2 = Z_1 \cdot I = 4{,}71\,e^{-0{,}7854}\,V$$

$$u_2(t) = 3{,}33 + 4{,}71 \cdot \sin(1000t - 0{,}7854)\,V$$

$$u_{2\,ef} = \sqrt{3{,}33^2 + \tfrac{1}{2}4{,}71^2} = \underline{\underline{4{,}714\,V}}$$

(P2)

18.4.98

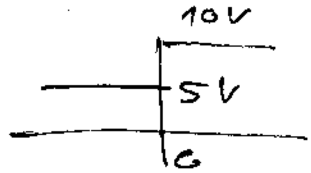


$u_1(t) = 5 + 5 \cdot \mathbb{1}(t)$ V

R = 500 Ω

C = 1 μF

L = 2 mH



$$\frac{1}{L}\int_0^t (u_2-u_1)\,dt - i_L(0) + \frac{u_2}{R} + C\frac{du_2}{dt} = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{L}(u_2-u_1) + \frac{1}{R}\frac{du_2}{dt} + C\frac{d^2u_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2u_2}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC}(u_2-u_1) = 0$$ → u_1 partikulární řešení

$$\lambda^2 + 2000\lambda + 5\cdot 10^8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1000 \pm 22338\,j$$

$$u_2(t) = k\cdot e^{-\alpha t}\cdot \sin(\omega t + \varphi) + u_p(\infty)$$

$$u_2(t) = k\cdot e^{-1000t}\cdot \sin(22338 t + \varphi) + 10V$$

$$u_2(0) = 5V$$

$$i_L(0-) = i_L(0+) = \frac{u_1}{R} = \frac{5}{500} = 0{,}0[illegible]$$

$$5 = k\cdot \sin\varphi + 10 \Rightarrow \boxed{k = \frac{-5}{\sin\varphi}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{L}\int_0^0 (u_2-u_1)\,dt}_{0} - i_L(0) + \frac{u_2(0+)}{R} + C\,u'_2(0+) = 0$$

$$u'_C(0+) = \frac{i_L(0+)}{C} - \frac{u_2(0+)}{RC} = \frac{0{,}01}{1\mu} - \frac{10}{1\mu\cdot 500} = 30\,000$$

$$u'_2(t) = -1000k\cdot\sin(\varphi) + k\cdot 22338\cdot\cos(\varphi)$$

$$30000 = -1000k\,\sin\varphi + k\cdot 22338\cos\varphi$$

$$30000 = -1000\cdot\frac{(-5)}{\cancel{\sin\varphi}}\cdot\cancel{\sin\varphi} + \frac{-5}{\sin\varphi}\cdot 22338\cdot\cos\varphi$$

$$25000 = -111690\cdot\cot\varphi$$

$$-0{,}2238 = \cot\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$$

$$\varphi = -1{,}35$$

$$\underline{\underline{k = 5{,}12}}$$

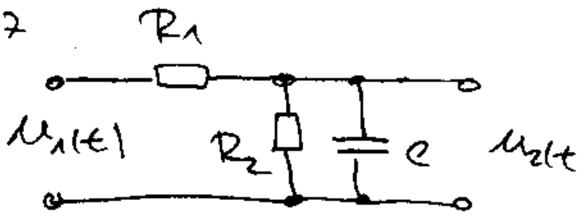
$$\underline{u_2(t) = 5{,}12\cdot e^{-1000t}\cdot\sin(22338t - 1{,}35)}$$

7

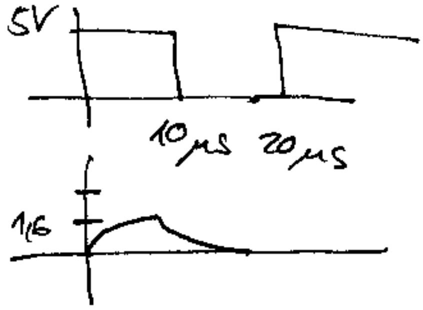
22.11.97

$R_1 = R_2 = 400\,\Omega$

$C = 50\,nF$



$t<0$ obvod bez energie



$$\frac{u_2-u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}+C\frac{du_2}{dt}=0$$

$$C\frac{du_2}{dt}+2\frac{u_2}{R_2}=\frac{u_1}{R} \rightarrow \text{part. řeš.}$$

$$\lambda+\frac{2}{RC}=0 \qquad \lambda=-1\cdot10^5$$

(1)

$$u_2(t)=k\cdot e^{t\lambda}+u_2(\infty)$$

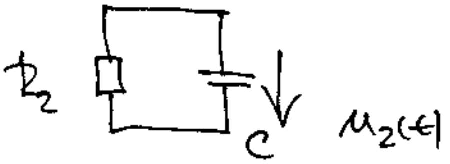
$$u_2(t)=k\cdot e^{-1\cdot10^5 t}+2{,}5 \qquad u_2(\infty)=5\cdot\frac{400}{400+400}=2{,}5$$

$$u_2(0)=k+2{,}5 \Rightarrow 0=k+2{,}5 \Rightarrow k=-2{,}5$$

$$u_2(t)=-2{,}5\cdot e^{-1\cdot10^5 t}+2{,}5$$

$$u_2(10\mu)=1{,}58\,V$$

(2.)



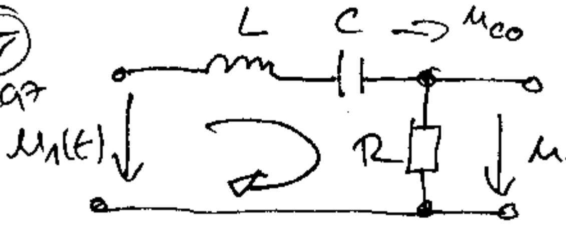
$$\frac{u_2}{R}+C\frac{du_2}{dt}=0 \Rightarrow \lambda=-5\cdot10^4$$

$$u_2(10\mu s)=1{,}58\,V \qquad u_2(t)=k\cdot e^{-5\cdot10^4 t}$$

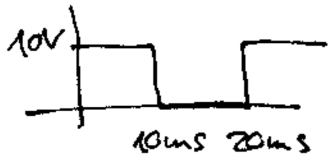
$$1{,}58=k\cdot$$

$$u_2(t)=1{,}58\cdot e^{-5}$$

(PF) 18.9.97



$R = 1200\,\Omega$
$C = 10\,nF$
$L = 10\,mH$



$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_{C(0)} + R\cdot i = u_1$$

$$L\frac{d^2i}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

$$\lambda^2 + 120\,000\cdot\lambda + 10 = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i = 0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 60000$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \to \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100\,000$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 99819{,}83$$

$$i(t) = e^{-\alpha t}(k_1 \sin\omega t + k_2\cos\omega t) + \underbrace{i_p(t)}_{0}$$

$$i'(t) = -\alpha\cdot e^{-\alpha t}(k_1\sin\omega t + k_2\cos\omega t) +$$
$$+ \quad e^{-\alpha t}(\omega k_1\cos\omega t - \omega k_2 \sin\omega t)$$

$$L\cdot i'(0+) + \underbrace{R\,i(0+)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{C}\int_0^0 i\,dt}_{0} + \underbrace{u_C(0)}_{0} - u_0 = 0$$

$$i'(0+) = \frac{u_0}{L} = \frac{10}{10^{-6}} = \underline{10^7\ A/s}$$

$$\underline{i(0) = 0}$$

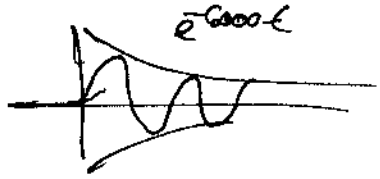
$$0 = \underbrace{e^{-60000t}}_{1}\,(k_1 \underbrace{\sin \tfrac{99819}{100000}t}_{0} + k_2\cos \tfrac{99819}{100000}t) +$$

$$0 = k_2$$

$$10^7 = -60000\cdot\underbrace{e^{-60000t}}_{1}\,(k_1 \sin \tfrac{99819}{100000}t) + \cancel{e^{-6000t}}$$
$$+ \underbrace{e^{-60000t}}_{1}\left(\tfrac{99819}{100000}\cdot k_1 \underbrace{\cos\omega t}\right)$$

$$10^7 = k_1\cdot \tfrac{99819}{100000} \to \underline{k_1 = 100{,}18}$$

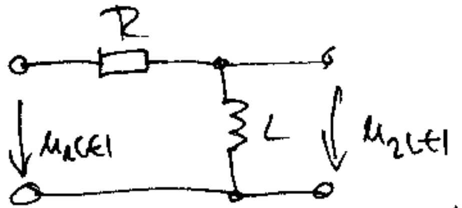
$i(t) = e^{-6000t} \cdot 100{,}18 \sin 99899 t$



$$u_2(t) = R \cdot i(t) = 12021 \cdot e^{-6000t} \cdot \sin 99819 t$$

78

8.7.97



$u_1(t) = 5 + \underline{10} \sin(10000t)$

$R = 300\,\Omega$

$L = 17{,}32\ mH$

$U_{2S} = 0{,}1\,V$

HUS: $Z = R + j\omega L = 300 + j\,173{,}2 = 346 \cdot e^{0{,}523j}\ \Omega$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{346 \cdot e^{+0{,}523j}} = 0{,}0289 \cdot e^{-0{,}523j}\ A$$

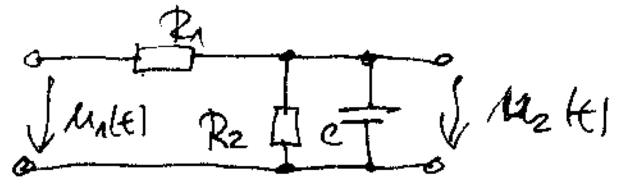
$$U_2 = I \cdot Z_L = I \cdot j\omega L = 0{,}0289 \cdot e^{-0{,}523j} \cdot 173{,}2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}j}$$

$$\cancel{Z_L} = U_2 = 5{,}0055 \cdot e^{1{,}0472j}$$

$$\underline{\underline{u_2(t) = 5{,}0055 \cdot \sin(10000t + 1{,}0472)\ V}}$$

$$U_{2ef} = \sqrt{\frac{1}{2}\, 5{,}0055^2} = \underline{\underline{3{,}539\,V}}$$

Pr



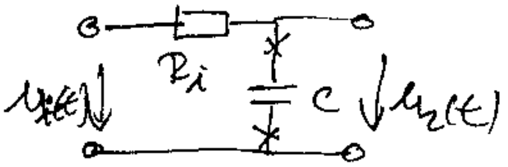
$u_1(t) = 10 \cdot \sin(100000t)$

$R_1 = R_2 = 1000\Omega$

$C = 20000pF$

$u_2(t) = ?$

$t<0$ și fără energie



$$u_i(t) = u_1(t) \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 5\sin(100000t)$$

$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = 500\Omega$$

Pt $t<0$ $\quad u_C(0) = 0$

$$C\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - u_i}{R_i} = 0$$

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_iC} = \frac{u_i}{R_iC} \qquad \lambda + \frac{1}{R_iC} = 0 \quad \lambda = -10000$$

$$u_2 = k \cdot e^{-100000t} + u_{2part.} \ (t \to \infty$$

$$u_{2part} = u_i \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_i + \frac{1}{j\omega C}} = u_i \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1+j\omega CR_i}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega R_iC} \cdot u_i =$$

$$= \frac{1}{1+j} \cdot 5 = 3.53 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

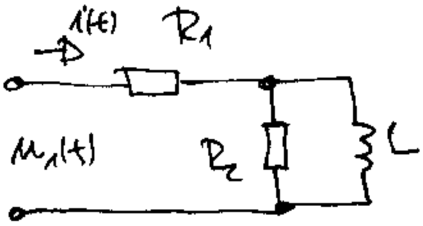
$$u_2(t) = k \cdot e^{-100000t} + 3.53 \cdot \sin\left(100000t - \frac{\pi}{4}\right) V$$

$$u_2(0) = 0 = k + 3{,}53 \cdot \sin -\frac{\pi}{4}$$

$$k = 2{,}5$$

$$u_2(t) = 2{,}5 \cdot e^{-10^5 t} + 3{,}53 \cdot \sin\left(100000t - \frac{\pi}{4}\right) V$$

PF



$u_1(t) = 5 + 10 \cdot \sin(1000t)$

$R_1 = 100\,\Omega$ $\quad L = 0{,}2\,H$

$R_2 = 200\,\Omega$

Stejnosměrná složka $\quad I = \frac{5}{100} = 0{,}05\,A$

HUS:

$$Z_c = R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} = 100 + \frac{40000j}{200 + 200j}$$

$$Z_c = \frac{20000 + 20000j + 40000j}{200 + 200j} = \frac{20000 + 60000j}{200 + 200j} =$$

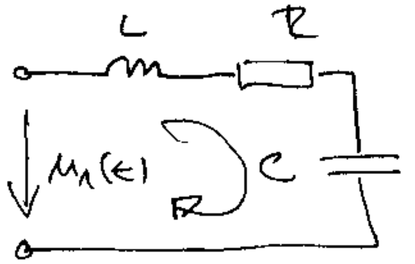
$$= \frac{63245 \cdot e^{1{,}537}}{282 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}} = 224 \cdot e^{-0{,}4636j}$$

$$I = \frac{U}{Z_c} = \frac{10}{224 \cdot e^{-0{,}4636j}} = 0{,}0447 \cdot e^{0{,}4636j}$$

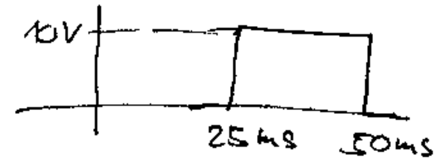
$$\underline{i(t) = 0{,}05 + 0{,}0447 \cdot \sin(1000t + 0{,}4636)}$$

$$I_{ef} = \sqrt{0{,}05^2 + \frac{1}{2}\,0{,}0447^2} = 0{,}059\,A$$

RD



$R = 500\,\Omega \quad C = 125\,\mu F \quad L = 5H$



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + \underbrace{u_{C}(0)}_{0} = u_1 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = 0 \qquad \lambda^2 + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\lambda + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0} = 0 \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\lambda^2 + 100\lambda + 1600 = 0$$

$$\lambda_1 = -80 \;,\; \lambda_2 = -20$$

$$i(t) = k_1 \cdot e^{-80t} + k_2 e^{-20t} + \underbrace{i_{part.}(t)}_{0}$$

$$i'(t) = -80 k_1 e^{-80t} - 20 k_2 e^{-20t} \qquad i(0) = 0$$

$$L \cdot i'(0) + R\,i(0) = u_1$$

$$i'(0) = \frac{u_1}{L} = \frac{10}{5H} = 2$$

$$2 = -80 k_1 - 20 k_2$$

$$0 = k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 = -k_2$$

$$2 = +80 k_2 - 20 k_2$$

$$2 = 60 k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{30} \quad k_1 = -\frac{1}{30}$$

Jenže fáz. posunutí!

$$i(t) = -0{,}033 \cdot e^{-80t} + 0{,}033 \cdot e^{-20t}$$

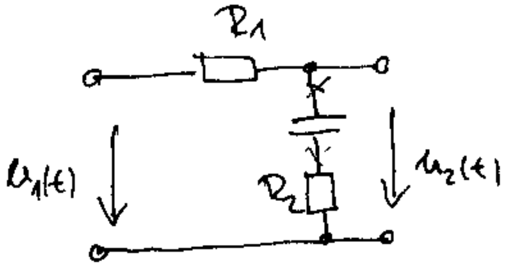
$$i(t) = -0{,}033 \cdot e^{-80(t-0{,}025)} + 0{,}033 \cdot e^{-20(t-0{,}025)}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C}\int_{0\;\;25ms}^{t\;\;50ms} \left[-0{,}033 \cdot e^{-80(t-0{,}025)} + 0{,}033 \cdot e^{-20(t-0{,}025)}\right] + K =$$

$u_2(0) = 10V$

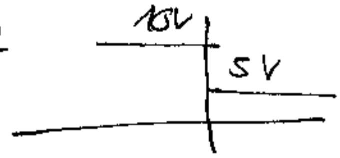
$$\left[-0{,}033 \cdot \frac{e^{-80t}}{-80}\right]_0^{25ms} = 412{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \left[e^{-80t}\right]_0^{25} = 2{,}85$$

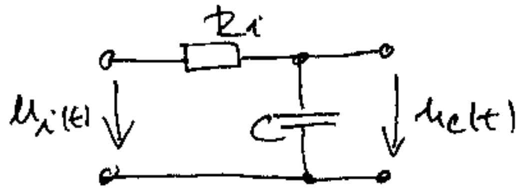
(22)



$R_1 = R_2 = 100\,\Omega$

$C = 10\,\mu F$





$R_i = R_1 + R_2$

$u_i = u_1$

$u_c(0) = 10V = u_c(0+)$

$$C\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c - u_1}{R_i} = 0 \qquad RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_1$$

$$\lambda + \frac{1}{RC_i} = 0 \Rightarrow \lambda = -500$$

$$u_c = k\cdot e^{-500t} + u_1(\infty)$$

$$10 = k + 5 \Rightarrow k = 5 \quad \Rightarrow u_c(t) = 5\cdot e^{-500t} + 5\,V$$

$$i_c(t) = C\cdot\frac{du_c}{dt} = -0{,}025\cdot e^{-500t}$$

$$u_2(t) = u_c(t) + i_c(t)\cdot R_2$$

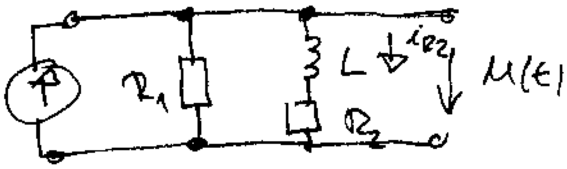
$$u_2(t) = 5\cdot e^{-500t} + 5 - 100\cdot 0{,}025\cdot e^{-500t}$$

$$\underline{\underline{u_2(t) = 2{,}5\cdot e^{-500t} + 5\,V}}$$

(P1)

15.4.2000

$i(t)$



$i(t) = 0{,}1 \sin 1000t$

$R_1 = 146{,}4\,\Omega \quad L = 0{,}3464\,H$

$R_2 = 200\,\Omega$

$$Z_c = \frac{R_1 \cdot (R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{R_1 R_2 + j\omega L R_1}{R_1 + R_2 + j\omega L}$$

$$Z_c = \frac{29280 + j\,50712}{346{,}4 + j\,346{,}4} = \frac{58557{,}8\, e^{1{,}047j}}{3481 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}} = 16{,}8 \cdot e^{0{,}26j}$$

$I = 0{,}1 \cdot .$

$$U = I \cdot Z_c = 0{,}1 \cdot 16{,}8 \cdot e^{0{,}26j} = 1{,}68 \cdot e^{0{,}26j}.$$

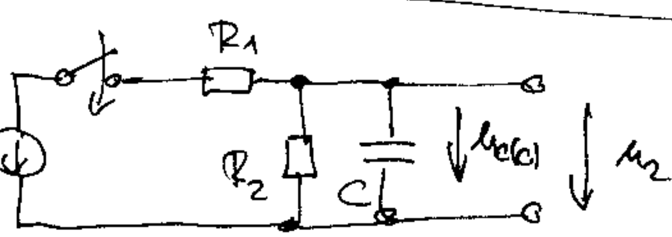
$$u(t) = 1{,}68 \cdot \sin(1000t + 0{,}26)\ V$$

$$I_{R2} = \frac{U}{R_2 + j\omega L} = \frac{U}{200 + 346{,}4j} = \frac{1{,}68 \cdot e^{0{,}26j}}{400 : e^{1{,}046j}} = \underline{0{,}0042 \cdot e^{-0{,}786j}}$$

$$P = R_2 |I_{R2}|^2 + \frac{|U|^2}{R_1} = 3{,}528 \cdot 10^{-3} W + 19{,}27 \cdot 10^{-3} W = 22{,}8 \cdot 10^{-3} W$$

(P2)

15.4.2000



$t > 0$ sepne $\quad u_2(t) = ?$

$u_1(t) = 10 \sin 1000t$

$R_1 = R_2 = 2500\,\Omega,\ C = 0{,}4\,\mu F$

HUS: $(u_C(0))$

$$Z_C = R_1 + \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega C R_2}{j\omega C}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}$$

$$Z_c = 2{,}5k + \frac{2{,}5k}{1 + 1j} = \frac{2{,}5k + 2{,}5kj + 2{,}5k}{1 + 1j} = \frac{5k + 2{,}5kj}{1 + j} =$$

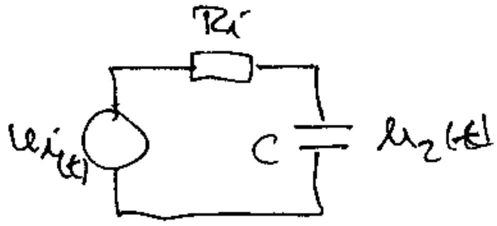
$$= \frac{5590 \cdot e^{0{,}46j}}{1{,}41 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}} = 3964 \cdot e^{-0{,}325j}$$

$$I = \frac{U}{Z_c} = \frac{10}{3964}\, e^{0{,}325j} = 2{,}52 \cdot 10^{-3} \cdot e^{0{,}325j}$$

$U = I\cdot Z = \frac{2{,}5k}{1+j}\cdot 2{,}52\cdot 10^{-3}\cdot e^{0{,}325j} = \frac{2{,}5}{1{,}41\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}\cdot 2{,}52\cdot e^{0{,}325j}\cdot 10^{0}$ …

$= 4{,}468\cdot e^{0{,}46j}$ .. part. řešení (po vymizení přechl. děje

$u_{2p} = 4{,}468\cdot\sin(1000t - 0{,}46)$



$u_i = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot u_1 = 5\cdot\sin(1000t)$

$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = 1250$

$C\cdot\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - u_i}{R_i} = 0$ $\qquad \lambda + \frac{1}{R_i C} = 0 \quad \lambda = -2000$

$u(0+) = 5$

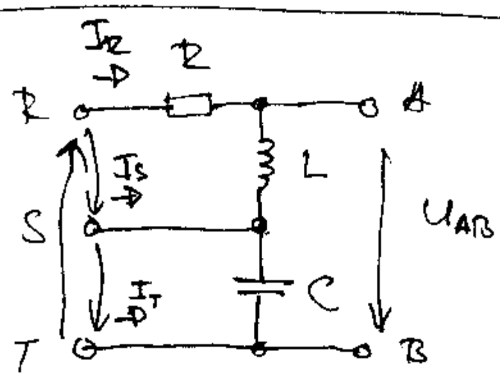
$u_2(t) = k\cdot e^{-2000t} + u_{2p}$

$5 = k + 4{,}468\cdot\sin(-0{,}46)$

$k = 6{,}98$

$u_2(t) = 6{,}98\cdot e^{-2000t} + 4{,}468\cdot\sin(-0{,}46 + 1000t)$

27.11.99
(PŘ)



$f = 50\,Hz$

$U_{RS} = 380\,V$

$U_{ST} = 380\cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

$U_{AB} = ?$ $\quad u_{AB}(t) = ?$

$P = ?$ $\quad R = 500\,\Omega$

$L = 1{,}5915\,H$

$C = 3{,}183\,\mu F$

$\hat I_R = \frac{\hat U_{RS}}{R + j\omega L} = \frac{380}{500 + 500j} = 0{,}537\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$707\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$\hat I_S = \frac{\hat U_{ST}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{380\cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}}{}\cdot 0{,}999\cdot 10^{-3}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 0{,}3799\cdot e^{j\cdot -0{,}523}$

$\hat I_T = -\hat I_R - \hat I_S$

$U_L = I_R\cdot j\omega L = 0{,}537\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot 500\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 268\cdot e^{j0{,}7\ldots}$

$U_C = I_S\cdot\frac{1}{j\omega C} = \hat U_{ST} = 380\cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

$$U_{AB} = 268\cdot e^{j97{,}8} + 380\cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \cancel{190},5 + 188{,}4j + -\cancel{190} - j329 =$$

$$= -140j = 140\cdot e^{-\frac{\pi}{2}j}$$

$$u_{AB} = \sqrt{2}\,140\cdot \sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right)$$

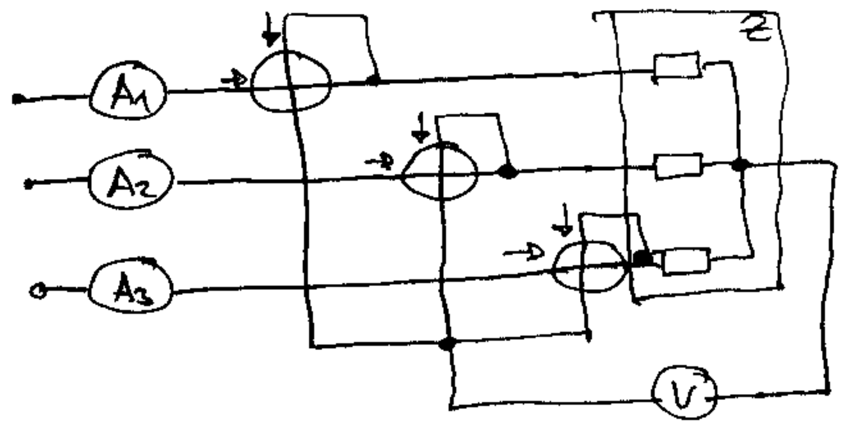
$$P = R\cdot |I_Z|^2 = 144\ \mathrm{W}$$

$$Q = |I_Z|^2\cdot\omega L + \ominus\ \frac{|U_{ST}|^2}{\frac{1}{\omega C}}$$

induktivní zátěž (+)

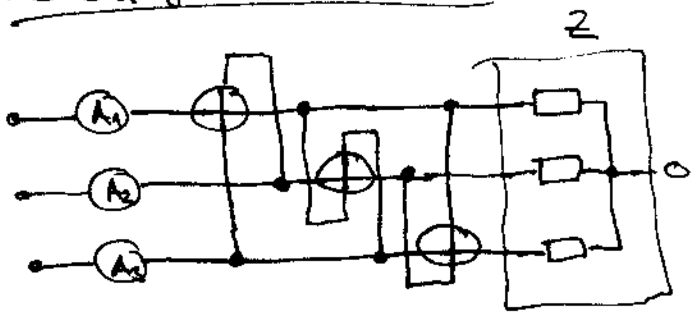
kapacitní zátěž (−)

Měření činného výkonu



$$P_c = P_1 + P_2 + P_3 \doteq k_{w1}\alpha_1 + k_{w2}\alpha_2 + k_{w3}\alpha_3$$

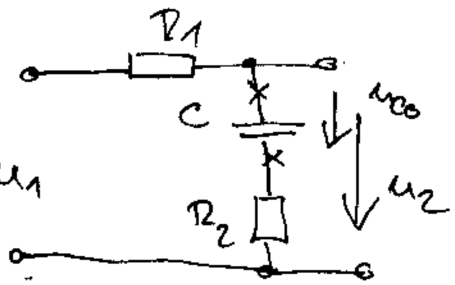
Měření jalového výkonu

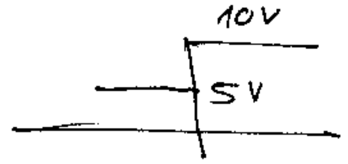


$$Q_c = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{k_{w1}\alpha_1 + k_{w2}\alpha_2 + k_{w3}\alpha_3}{\sqrt{3}}$$

PL

27.11.99





$R_1 = 200\,\Omega \quad R_2 = 100\,\Omega$

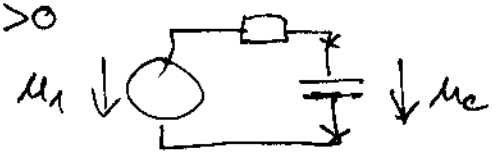
$C = 10\,\mu F$

$t < 0$

$R_i = R_1 + R_2 = 300\,\Omega$

$U_i = U_1 \qquad u_{c(0-)} = 5V$

$t > 0$



$$C\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c - u_1}{R} = 0$$

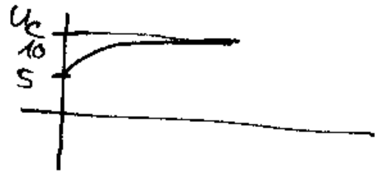
$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_1 \leftarrow \text{pane.vos}$$

$u_1(\infty) = 10V$

$$\lambda = -\frac{1}{RC} = -333{,}3$$

$$u_c(t) = k \cdot e^{-333{,}3t} + u_p$$

$$u_c(t) = k \cdot e^{-333{,}3t} + 10$$



$$5 = k + 10 \Rightarrow \underline{k = -5}$$

$i(t) = C\frac{di}{dt}$

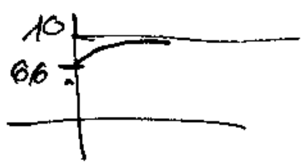
$$u_c(t) = -5 \cdot e^{-333t} + 10 \Rightarrow i(t) = 1666 \cdot e^{-333t} \cdot C$$

$$i(t) = 0{,}01666 \cdot e^{-333t}$$

$$u_2(t) = u_c(t) + i(t) R_2$$

$$u_2(t) = -5 \cdot e^{-333t} + 10 + 1{,}6 \cdot e^{-333t}$$

$$\underline{u_2(t) = -3{,}33 \cdot e^{-333t} + 10}$$

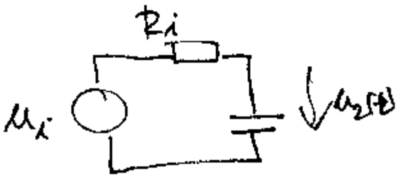


16.9.1999

PH

$u_1 = 10 \cdot \sin 20000t$

$R_1 = R_2 = 1k\Omega \quad C = 0{,}1\,\mu F$



$$R_i = \frac{R_1 = R_2}{2} = 500\,\Omega$$

$$u_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot u_1 = 5 \cdot \sin 20000t$$

$$C\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - u_i}{R_i} = 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{R_i C} = -20000$$

$$u_2(t) = k \cdot e^{-20000t} + u_{2\,part} \qquad u_2(0) = 0$$

$$U_{2p} = U_1 \cdot \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}} = \frac{\frac{R_2}{\cancel{1 + j\omega C R_2}}}{\frac{j\omega C R_2 R_1 + R_2}{\cancel{1 + j\omega C R_2}}} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega C R_1 R_2} \cdot U_1$$

$$U_{2p} = \frac{1k}{1k + 2kj} \cdot 10 = \frac{10k}{2236 \cdot e^{j1{,}107}} = 4{,}47 \cdot e^{-j1{,}107}$$

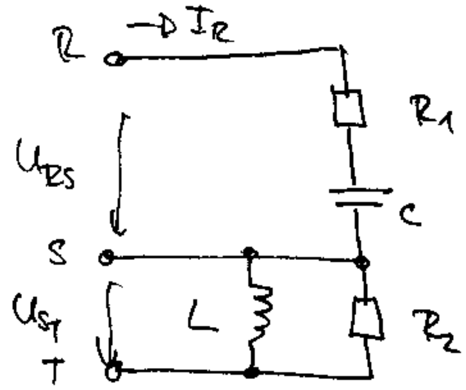
$$u_{2p}(t) = 4{,}47 \cdot \sin(20000t - 1{,}107)$$

$$0 = k \cdot 1 + 4{,}47 \cdot \sin(-1{,}107) \Rightarrow k = 3{,}99$$

$$\underline{\underline{u_2(t) = 3{,}99 \cdot e^{-2000t} + 4{,}47 \cdot \sin(20000t - 1{,}107)}}$$

(PFi)

16.9.1999



$U_{RS} = 380\ V$

$U_{ST} = 380 \cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

$I_R = ?$ $\quad i_R(t) = ?$

$Q = ?$ $\quad R_1 = 200\Omega,\ R_2 = 200\Omega$

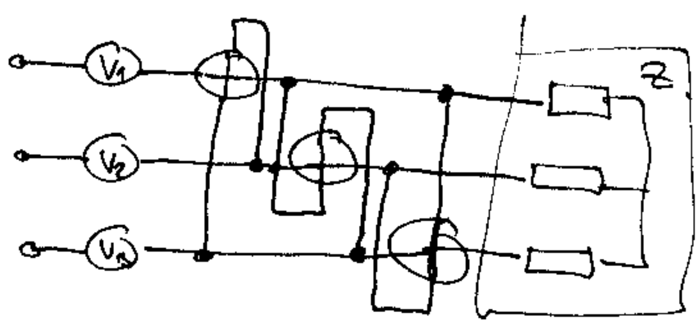
$L = 0{,}6366 H,\ C = 15{,}915\ \mu F$

$$I_R = \frac{U_{RS}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{380}{\frac{1+j\omega C R_1}{j\omega C}} = \frac{380}{200 - 200j} = \frac{380}{282 \cdot e^{-0{,}785 j}} = 1{,}34 \cdot e^{0{,}785 j}$$

$$i_R(t) = 1{,}34 \cdot \sqrt{2} \sin(314t + 0{,}785)$$

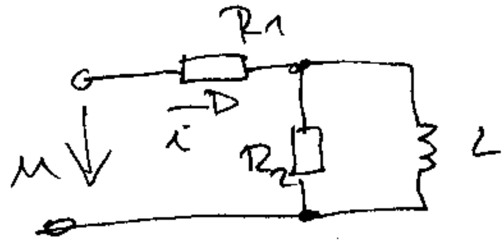
$$Q = \frac{|U_{ST}|^2}{\omega L} + |I_R|^2 \cdot \frac{-1}{\omega C} = 722 - 359 = \underline{\underline{363}}\ VAr$$

$$S = \sqrt{Q^2 + P^2}$$



$$Q = \frac{k_{w1}\alpha_1 + k_{w2}\alpha_2 + k_{w3}\alpha_3}{\sqrt{3}}$$

(při)
8.7.1999



$u = 5 + 8 \sin(1000t)$

$i(t) = ?$ $I = ?$

$R_1 = 100\,\Omega$ $R_2 = 200\,\Omega$

$L = 0{,}06667\,H$

stejnosm. složka

$I = \frac{U}{R_1} = \frac{5}{100} = 0{,}05\,A$

HUS: $I = \frac{U}{Z_C}$ $Z_C = R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} = 100 + \frac{\cancel{1333{,}4}j}{}$

$$Z = \frac{R_1R_2 + j\omega L R_1 + j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} = \frac{20000 + 20000j}{200 + 66{,}67j} = \frac{28284 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}}{210 \cdot e^{0{,}321j}} =$$

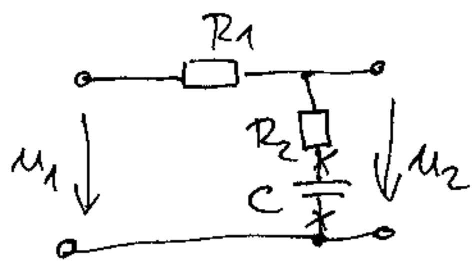
$$Z = 134 \cdot e^{0{,}464j}$$

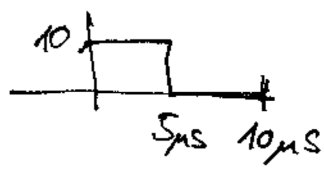
$$I = \frac{8}{134 \cdot e^{0{,}464j}} = 0{,}0597 \cdot e^{-0{,}464j}$$

$$i(t) = 0{,}05 + 0{,}0597 \cdot \sin(1000t - 0{,}464)\ A$$

$$I = \sqrt{0{,}05^2 + \frac{1}{2}\, 0{,}0597^2} = 0{,}077\,A$$

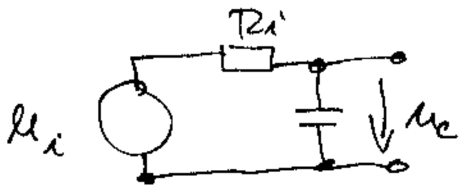
(při)
8.7.1999





$R_1 = R_2 = 250\,\Omega$

$C = 1000\,pF$



$R_i = R_1 + R_2$

$u_i = u_1$

$$C\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c - u_1}{R_1} = 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{RC} = -2 \cdot 10^6$$

$$u_c = k \cdot e^{-2\cdot 10^6 t} + u_{cp} \qquad u_{cp} = u_1 = 10\,V$$

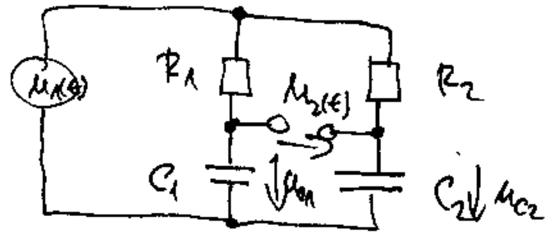
$$u_c(0) = 0 = k + 10 \Rightarrow k = -10$$

$$u(t) = -10 \cdot e^{-2\cdot 10^6 t} + 10 \qquad i(t) = C \frac{du_c}{dt} = 0{,}02 \cdot e^{-2\cdot 10^6 t} \cdot R = u$$

$$\underline{u_2(t) = -10 \cdot e^{-2\cdot 10^6 t} + 10 + 5 \cdot e^{-2\cdot 10^6 t}\ V}$$

(pv)

17.4.199

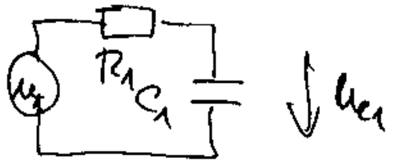


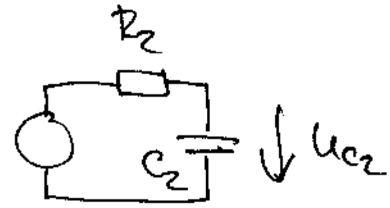
$R_1 = R_2 = 100\,\Omega$

$C_1 = 5\,\mu F,\ C_2 = 20\,\mu F$

$u_1(t) = 5 + 10 \cdot \sin(1000t)$

$u_{C1ss} = u_{C2ss} = 5V$





Hus: $\hat{U}_{C1} = U_1 \cdot \dfrac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = U_1 \cdot \dfrac{\cancel{\frac{1}{j\omega C_1}}}{\frac{1 + j\omega C_1 R_1}{\cancel{j\omega C_1}}} = U_1 \cdot \dfrac{1}{1 + j\omega C_1 R_1}$

$U_{C1} = \dfrac{10}{1 + 0{,}5j} = \dfrac{10}{1{,}11 \cdot e^{0{,}46j}} = 9 \cdot e^{-0{,}460j} = 8{,}06 - 3{,}99j$

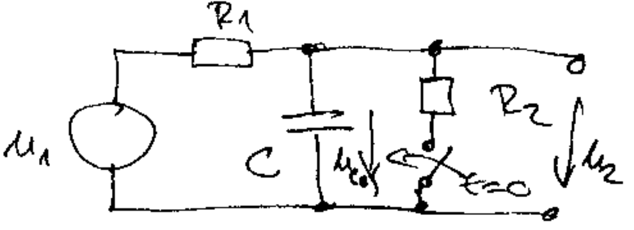
$U_{C2} = \dfrac{10}{1 + 2j} = \dfrac{10}{2{,}23 \cdot e^{1{,}107j}} = 4{,}48 \cdot e^{-1{,}107j} = 2 - 4j$

$U_2 = U_{C1} - U_{C2} = 6 - 8j = 10 \cdot e^{-0{,}927j}$

$\underline{u_2(t) = 10 \cdot \sin(1000t - 0{,}927)}$

(P2)

17.4.1999



$u_1 = 10 \sin(1000t)$

$R_1 = R_2 = 500\Omega,\ C = 0{,}5\mu F$

$u_2(t) = ?$

HUS: $t<0$

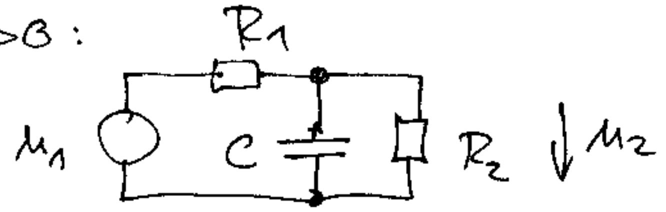
$$\hat{u}_c = \frac{u_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{u}_1 \cdot \frac{1}{1 + j\omega C R_1} = \hat{u}_1 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}25j} = \frac{10}{1{,}03 \cdot e^{0{,}24j}}$$

$$= 9{,}7 \cdot e^{-0{,}24j}$$

$$u_c = 9{,}7 \cdot \sin(1000t - 0{,}24)$$

$$u_{c(0)} = 9{,}7 \cdot \sin(-0{,}24) = -2{,}3\ V$$

$t>0$:



$$C \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_1}{R_1} = 0$$

$$C\frac{du_2}{dt} + u_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{u_1}{R_1} \qquad \lambda = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -8000$$

$$u_2(t) = k \cdot e^{-8000t} + u_{2p}.$$

---

u_{2p}: HUS:

$$\hat{u}_2 = \hat{u}_1 \cdot \frac{\frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}} = \frac{\hat{u}_1 \cdot \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}} =$$

$$= \hat{u}_1 \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}}{\frac{R_2 + R_1 + j\omega C R_2 R_1}{1 + j\omega C R_2}} = \hat{u}_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} = \hat{u}_1 \frac{500}{1000 + 125j} =$$

$$= \frac{10 \cdot 500}{1007 \cdot e^{0{,}124j}} = 4{,}96 \cdot e^{-0{,}124j} \Rightarrow u_{2p}(t) = 4{,}96 \cdot \sin(1000t - 0{,}124)$$

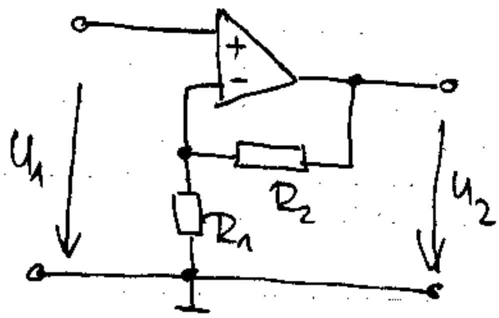
$$-2{,}3 = k + \underbrace{4{,}96 \cdot \sin(-0{,}124)}_{-0{,}613} \Rightarrow k = -1{,}686$$

$$u_2(t) = -1{,}686\, e^{-8000t} + 4{,}96 \cdot \sin(1000t - 0{,}124)$$

Elektrická měření

Jsou zákeřná, pokaždé jde o nějakou aplikaci operačního zesilovače, v rámci otázky je nutné spočítat odpory zpětnovazební sítě a výslednou chybu, následující řešené příklady jsou ze skript na cvičení, kde jsou jejich kompletní zadání téměř úplně na konci. Pro přípravu doporučuji projít si mimo tohoto také některé příklady ze starších zadání.

Neinvertující zesilovač U/U 25.1

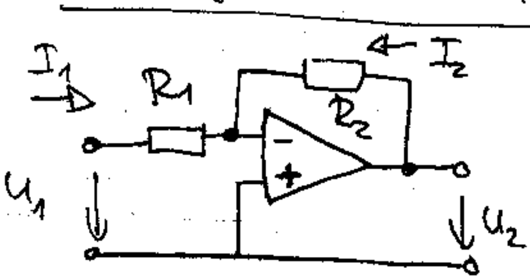


$$\frac{U_2}{U_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$R_{VST} \to \infty$

$R_{VÝST} \to 0$

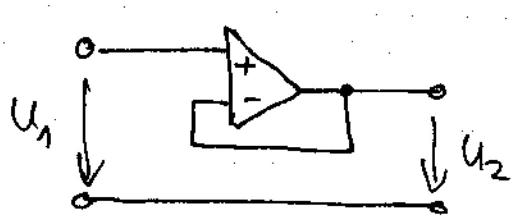
Invertující zesilovač U/U 25.2



$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad I_1 = -I_2 = \frac{U_1}{R_1} = -\frac{U_2}{R_2}$$

$$R_{VST} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 \quad , R_{VÝST} = 0$$

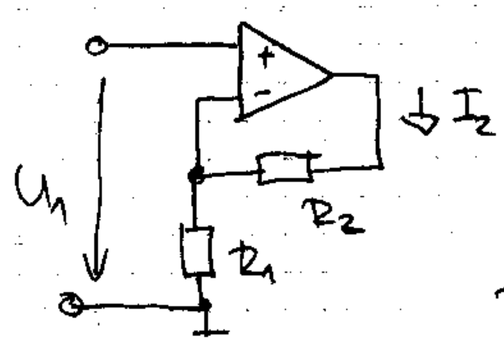
Napěťový sledovač 25.3



$U_1 = U_2$

$R_{VST} \to \infty \qquad R_{VÝST} = 0$

Zesilovač U/I neinvertující 25.5

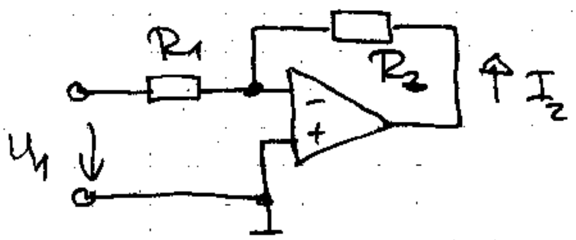


$$U_1 = R_1 \cdot I_2$$

$$I_2 = \frac{U_1}{R_1}$$

$R_{vst} \to \infty \quad R_{výst} \to \infty$

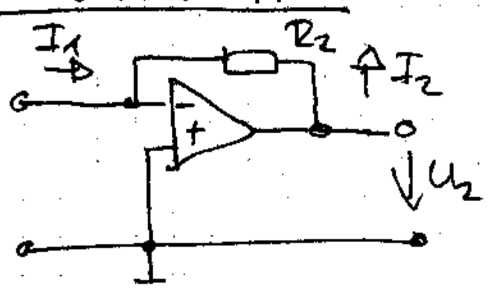
Zesilovač U/I invertující 25.6



$$I_2 = -I_1 = -\frac{U_1}{R_1}$$

$R_{vst} = R_1$, $R_{výst} \to \infty$

Zesilovač I/U 25.7



$$I_1 = -I_2$$

$$U_2 = -R_2 I_1$$

$R_{vst} = 0$, $R_{výst} = 0$

Chyby měření

1. $\Delta = ?$ $M = 0{,}3V$ $\pm 0{,}1\% \pm 0{,}05\%$ $N = 30mV$

$$\Delta = \frac{0{,}1}{100} \cdot 30m + \frac{0{,}05}{100} \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{\pm 0{,}18\ mV}}$$

2. $\Delta = ?$ $M = 30mA,\ N = 10mA$ $\pm 0{,}2\% \pm 0{,}1\%$

$$\Delta = \frac{0{,}2}{100} \cdot 10m + \frac{0{,}1}{100} \cdot 30m = \underline{\underline{\pm 0{,}05mA}}$$

3. $\delta = ?$ $M = 300mA$, 4 místa $N = 50\ mA$ $0{,}7\% + 6dgt.$ $300{,}0 \leftarrow 0{,}1 \cdot 6$

$$\delta = 0{,}7 \pm \frac{0{,}1 \cdot 6}{50} \cdot 100 = \underline{\underline{\pm 1{,}9\%}}$$

4. $\Delta = ?$ $M = 300V$, 4místa, $N = 100V$ $\pm 0{,}1\% \pm 3dgt$ $300{,}0 \rightarrow 0{,}1$

$$\Delta = \frac{0{,}1}{100} \cdot 100 \pm 3 \cdot 0{,}1 = \pm 0{,}4 \rightarrow \underline{\underline{\langle 99{,}6;\ 100{,}4 \rangle}}\ V$$

5. $T_p = 1{,}5$, $M = 130V$ $R_i = 2970\Omega$ $N = 65V$, $R_{iu} = 30\Omega$

$$\delta = 1{,}5 \cdot \frac{130}{65} = \pm 3\% \qquad \delta_m = -\frac{R_i}{R_i + R_v} \cdot 100 = -1\%$$

$$\underline{\underline{\delta = +2\% - 4\%}}$$

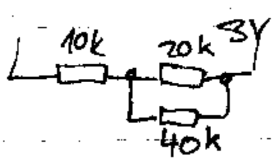
6. ?

7. $T_p = 0{,}5$, $M = 12V$, $U = 6V$ $\delta_m = -0{,}6\%$

$$\delta = 0{,}5 \cdot \frac{12}{6} = \pm 1\% \qquad \delta_m = -0{,}6 \qquad \underline{\underline{\langle -1{,}6\%,\ +0{,}4 \rangle}}$$

8. $T_p = 1$ $M = 1{,}2V$ $R = 5000\ \Omega/V$ $R_i = 600\Omega$

$$\delta_m = \frac{-R_i}{R_i + R_v} \cdot 100 = \frac{600}{600 + 1{,}2 \cdot 5000} \cdot 100 = -9{,}09\%$$

9. 

$$\delta_m = \frac{U_2' - U_2}{U_2} \cdot 100 = \frac{U_1 \cdot \frac{20\|40}{20\|40 + 10} - U_1 \frac{20}{20+10}}{U_1 \cdot \frac{20}{20+10}} \cdot 100 = -14{,}28\%$$

10. $U = 400mV$ $R_i = 10\Omega$

$$\delta_m = \frac{I_2' - I_2}{I_2} \cdot 100 = \frac{\frac{400-200}{10} - \frac{400}{10}}{\frac{400}{10}} \cdot 100 = -50\%$$

11. $\delta = ?$ $M = 200\,mV$ $N = 20\,mV$ $\pm 0{,}1\,\%$ $\pm 0{,}02\,\%$

$$0{,}1 + 0{,}02 \cdot \frac{200}{20} = \pm 0{,}3$$

12. $M = 6\,V$ $R/V = 10\,k\Omega/V \Rightarrow R_V = 60\,k\Omega$ $R_i = 300\,\Omega$ $N = 3\,V$

$$\delta_m = -\frac{R_i}{R_i + R_V} \cdot 100 = -0{,}5\,\%$$

Merilni zesilovače, usměrňovače i zdroje proudu s OZ

13. $I \Rightarrow U$ $A = 2\,mA/5\,V$ $R_2 = ?$ 25.7

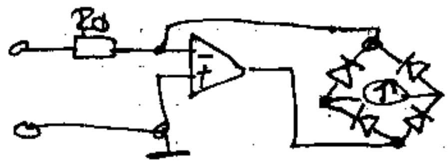
$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{5V}{2mA} = 2{,}5\,k\Omega \qquad \delta_{R_2} = 1 - \frac{M}{N} \cdot T_P = 0{,}5\,\%$$

14. $U_1 = 10\,mV$ $U_2 = 2{,}4\,V$ $R_1 > 1000\,\Omega$ invert. 25.4

$U \Rightarrow U$ inv. $R_1 = 2\,k\Omega$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{2{,}4}{10\,mV} = 240 = -\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_2 = A \cdot R_1 = 480\,k\Omega$$

15. U/I $U_{ef} = 5\,V$ $R_d = ?$ $M = 5\,mA$



$$I_{2S} = \frac{U_1}{1{,}11\,R_d} \Rightarrow R_d = \frac{U_1}{1{,}11\,I_{2S}} = 900{,}9\,\Omega$$

16. $U \Rightarrow I$ $I = 0{,}5\,mA$ $U = 1\,V$ 25.5 (25.6)

$$I_2 = \frac{U_1}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{U_1}{I_2} = \frac{1}{0{,}5\,m} = 2\,k\Omega$$

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{14}{0{,}5\,m} = 28\,k\Omega$$

25.4

17. $U \Rightarrow U$ inv. $U_1 = 5\,mV$, $R_i = 0{,}5\,\Omega$, $|U_2| = 5\,V$ $\delta_m < 1\,\%$

$$\frac{U_2}{U_1} = 1000 \qquad \delta_m = -\frac{R_i}{R_i + R_V} \cdot 100 < 1\,\%$$

$$R_V = 100 R_i - R_i$$

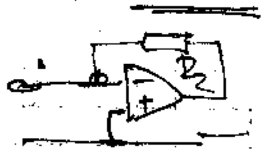
$$R_1 = \frac{0{,}5}{1} \cdot 100 = 50\,\Omega \text{ min}$$

$$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = A \cdot R_1 = 1000 \cdot 100 = 100\,k\Omega$$

18. $I \Rightarrow U$

$I_1 = 0{,}6\,mA$ $\qquad U_2 = -R_2 I_1$

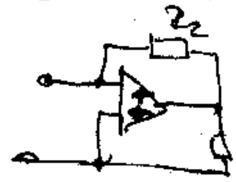
$U_2 = 6\,V$ $\qquad R_2 = \frac{6}{0{,}6\,mA} = 10\,k\Omega$



$$|\delta_{I_1}| = |\delta_{U_2}| + |\delta_{R_2}|$$

19. $I \Rightarrow U$ $\quad I_1 = 2\,mA$ $\qquad R_2 = \frac{U_2}{I_1} = 1\,k\Omega$

$U_2 = 2V$



$I_1 = -I_2$
$U_2 = R_2 I_1$

$$|\delta_{I_1}| = |\delta_{U_2}| + |\delta_{R_2}|$$

20. $R_v > 10000\,\Omega$ $\quad U_2 = 1V$

$A_u = 200$ $\qquad \frac{U_2}{U_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 200$ $\qquad R_1 = 1\,k\Omega$

$R_2 = 199\,k\Omega$

$U_2 = 0{,}5V$ $\qquad \underbrace{0{,}1\% + \frac{1}{0{,}5} \cdot 0{,}05}_{\text{V-metr}} + \underbrace{2 \cdot 0{,}1}_{\text{odpory}} = \underline{\underline{0{,}4}}$

21. $U_1 = 0 \dots 1{,}2V$

$I_2 = 12\,mA$ $\qquad I_2 = \frac{U_1}{R_1 \cdot 1{,}11} \Rightarrow R_1 = 90{,}09\,\Omega$

22. $A = 100$ $\qquad R_1 = 2\,k\Omega$ $\quad \delta < 2\%$

$R_1 > 1000\,\Omega$

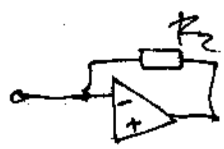
$U \Rightarrow U$ $\qquad \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_2 = 200\,k\Omega$ $\quad |\delta_{R_1}| + |\delta_{R_2}| < 2\%$

23. $I_2 = 0{,}1\,mA$ $\;,\; R_i = 100\,\Omega$ $\quad$ 1000 dílků

$R_1 = 10\,k\Omega$ $\qquad k = 10\,mV/d$ $\qquad U_1 = 1V$

$$I_2 = -I_1 = -\frac{U_1}{R_1} \Rightarrow 10000 = R_1$$

24. $I \Rightarrow U$ $\quad 1\,mA \Rightarrow 10V$



$U_2 = I_1 \cdot R_2$

$R_2 = \underline{10\,k\Omega} = \frac{U_2}{I_1}$

$N = 0{,}5\,mA \Rightarrow N = 5$ $\quad M = 10V$ $\quad 0{,}2\% \pm 0{,}1$

$|\delta_{U_2}| = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot \frac{10}{5} = \underline{\underline{0{,}4}}$ $\qquad |\delta_{oz}| = \frac{1\mu}{0{,}5m} \cdot 100 = 0{,}2$ ← vst. klid I; ← měř. hodnota

$1 - |\delta| = |\delta_{U_2}| + |\delta_{oz}| = 1 - 0{,}4 - 0{,}2 = \underline{0{,}4}$

25. $A = 100$ $\qquad$ AD: $M = 1V$, $0{,}25\%$ FS

$U_1 = 5\,mV$ $\quad R_i = 1\,\Omega$

$-\frac{R_2}{R_1} = 100 = \frac{U_2}{U_1}$ $\qquad R_1 = 1\,k\Omega$ $\qquad \delta_m = \frac{1}{1+100} \cdot 100 = 0{,}1$

$R_2 = A \cdot R_1 = 100\,k\Omega$ $\qquad |\delta_{U_2}| = \frac{1}{5m \cdot 100} \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}5\%}}$

$$\underline{|\delta_{R_2}| = 1 - |0{,}1| - 0{,}5 = 0{,}4}$$

26. $U_1 = 1{,}25$ $\qquad I_2 = \dfrac{U_1}{R_d \cdot 1{,}11} \Rightarrow R_d = \dfrac{U_1}{I_2 \cdot 1{,}11} = 225{,}2$

$I_2 = 5\,mA$

$\cancel{|\delta_{0z}| \leq 1\,mA}$

27. $U_1 = 6\,V$ $\qquad R_d = \underline{459{,}45\,\Omega}$

$U_2 = 60\,mV,\ 5\,\Omega \Rightarrow I_2 = 0{,}012$

28. $I \Rightarrow U$ $\quad I_1 = 0{,}5\,mA$ $\quad |$ $M = 1\,V$ $\quad 0{,}1\% + 0{,}05\%$

$N = 0{,}1\,mA \cdot 2k = 0{,}2\,V$ $\qquad |\delta_{u_2}| = 0{,}1 + \dfrac{0{,}05 \cdot 1}{0{,}2}$

$I_1 = \dfrac{U_2}{R_2} \Rightarrow \underline{R_2 = 2\,k\Omega}$ $\qquad U_2 = R_2 \cdot I_1$ $\qquad |\delta_R| = 0{,}1$

$|\delta_I| = |\delta_{u_2}| + |\delta_R| + |\delta_{0z}|$ $\quad |\delta_{0z}| = \dfrac{\text{ust. vlivI}}{I_1\,\text{ust}} \cdot 100\%$ $\quad |\delta_{0z}| = \dfrac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} \cdot 100$

$|\delta_{0z}| = \dfrac{0{,}2\mu}{0{,}5m} \cdot 100 = 0{,}04\,\% \qquad \cancel{0{,}05\,\%}$

29. $U_1 < 2\,V$ ef. $\quad U_2 = 2{,}4\,V$

$R_v = 5\,k\Omega/V = 12\,k\Omega$

$$R_d = \frac{U_1}{I_2 \cdot 1{,}11} = \frac{U}{1{,}11 \cdot \frac{U_m}{R_m}} = \frac{2}{1{,}11 \cdot \frac{2{,}4}{12}} = \underline{9{,}009\,\Omega}$$

30. $U \Rightarrow I$ $\quad I_2 = 2\,mA$ $\quad R_2 = 0 \dots 5\,k\Omega$

$U_1 = 1\,V_{max}$

$I_2 = \dfrac{U_1}{R_1} \Rightarrow \underline{R_1 = 500\,\Omega}$ $\qquad R_z < \dfrac{U_{2sat} - U_1}{I_2}$

nebo $R_z < \dfrac{U_{2sat}}{I_2}$

31. $U \Rightarrow U$ $\quad U_1 = 200\,mV$ $\quad R_i = 0{,}5\,\Omega$ $\qquad \cancel{S_m = \frac{R_i + R_v}{R_i} \cdot 100}$

inv $\quad U_2 = 2\,V$ $\quad S_m < 1\%$

$\cancel{\delta_m = \frac{0{,}5 + R_1}{0{,}1}}$ $\quad S_m = \dfrac{R_i}{R_i + R_1} \cdot 100 \quad \dfrac{0{,}5}{0{,}5 + R_1} \cdot 100$ $\quad \cancel{1 \cdot 0{,}5 = 100 \cdot R_v}$

$S_m \cdot R_1 = 100 R_i + 100 R_v$

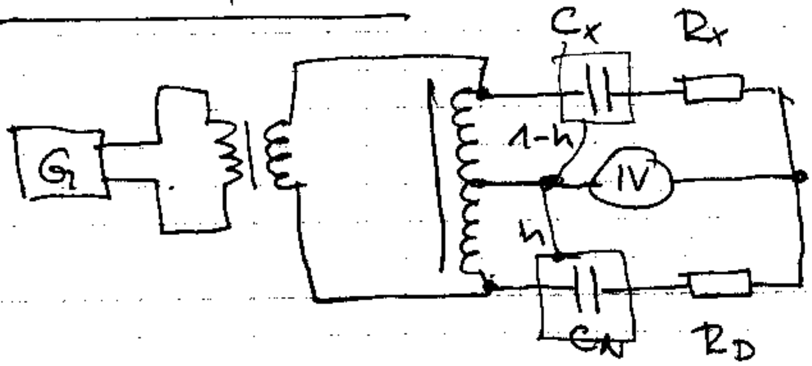
$R_1 > 50\,\Omega$

$\underline{R_1 = 100\,\Omega}$ $\qquad R_2 = \dfrac{U_2}{U_1} \cdot R_1 = \underline{1\,k\Omega}$

32. $U_{ef1} = 2{,}4$ $\qquad I_2 = \dfrac{U_{1ef}}{1{,}11 \cdot R_1} \Rightarrow R_1 = \underline{180{,}18}$

$I_2 = 12\,mA$

Měření impedancí



$I_1 = I_2$

$$\frac{U_1 (1-n)}{R_x + \frac{1}{j\omega C_x}} = \frac{U_1 \cdot n}{R_D + \frac{1}{j\omega C_N}}$$

$$R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{1-n}{n}\left(R_D + \frac{1}{j\omega C_N}\right)$$

$$R_x = \frac{1-n}{n} R_D$$

$$C_x = \frac{n}{1-n} \cdot C_N$$

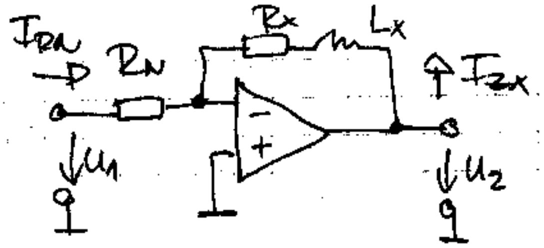
33. $C_x = ?$ $\quad tg\,\delta_x = ?$ $\quad tg\,\delta = \omega R_x C_x = \omega R_D C_N$

$C_N = 1\,nF \quad R_D = 1\,k\Omega \quad n = 0{,}45 \quad f = 2\,kHz$

$C_x = \frac{n}{1-n} C_N = 818\,pF \quad tg\,\delta = \omega R_D C_N = 0{,}0126$

34. $L_x = ? \quad R_x = ? \quad R_N = 1\,k\Omega \quad U_1 = 1\,V \quad Re\,U_2 = 0{,}2\,V \quad f = 159{,}2\,H$

$Im\,U_2 = -0{,}72\,V$



$R_x = -\frac{R_N}{U_1} \cdot Re\,U_2 \quad \frac{U_R}{R_N} = -\frac{U_2}{Z_x}$

$L_x = -\frac{R_N}{\omega U_1} \cdot Im\,U_2 \quad Z_x = R_x + j\omega L_x$

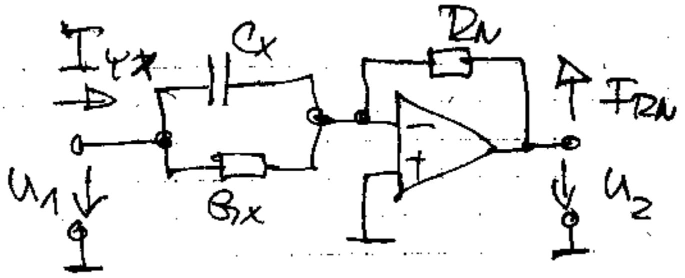
$L_x = -\frac{R_N}{U_1} \cdot Im\,U_2 = 0{,}72\,H$

$R_x = -\frac{R_N}{U_1} Re\,U_2 = 200\,\Omega$

35. $C_x = ? \quad tg\,\delta = ? \quad C_N = 1\,nF \quad R_D = 100\,k\Omega \quad f = 159{,}2\,Hz, \; n = 0{,}75$

$C_x = \frac{n}{1-n} \cdot C_N = 3\,nF \quad \cancel{R_x} \; R_N \quad tg\,\delta = \omega R_D C_N = 0{,}1$

36.



$G_x = -\frac{1}{U_1 R_N} \cdot Re\,U_2$

$C_x = -\frac{1}{\omega U_1 R_N} \cdot Im\,U_2$

$R_N = 10\,k\Omega \quad U_1 = 10\,V \quad Re\,U_2 = -0{,}4\,V \quad f = 1\,kHz$

$Im\,U_2 = -0{,}6\,V$

$C_x = 8276\,pF$

$G_x = 4\,\mu S$

$tg\,\delta = \frac{G_x}{\omega C_x} = 0{,}0769$

37. $L_x = ?$ $R_x = ?$

$R_N = 10k\Omega$, $U_1 = 1V$, $\mathrm{Re}\,U_2 = -0{,}03V$ $\mathrm{Im}\,U_2 = -0{,}6V$ $f = 1kHz$

$$L_x = -\frac{R_N}{\omega U_1}\,\mathrm{Im}\,U_2 = 0{,}955H \quad R_x = -\frac{R_N}{U_1}\,\mathrm{Re}\,U_2 = 300\Omega$$

38. $R_N = 10k\Omega$ $U_1 = 10V$ $\mathrm{Re}\,U_2 = -0{,}2V$, $\mathrm{Im}\,U_2 = -6{,}3V$

$f = 1592Hz$ $$C_x = -\frac{1}{\omega U_1 R_N}\cdot\mathrm{Im}\,U_2 = 6{,}3nF$$

$$G_x = -\frac{1}{U_1 R_N}\,\mathrm{Re}\,U_2 = 2\mu S$$

$$\tan\delta = \frac{G_x}{\omega C_x} = 0{,}0317$$

39. $C_N = 10nF$ $R_N = 1M\Omega$ $n_x = 10z$ $n_c = n_a = 100z$

$$\frac{N_c}{N_x} = 0{,}4 \quad \frac{N_a}{N_x} = 0{,}72$$

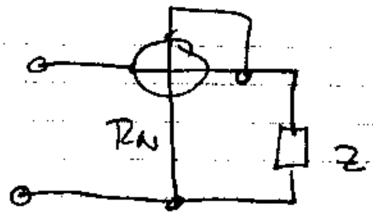
$$C_x = \frac{n_c}{n_x}\cdot\frac{N_c}{N_x}\cdot C_N = 40nF \quad G_x = \frac{n_a\cdot N_a}{n_x\cdot N_x}\cdot G_N = 7{,}2\mu S$$

40. $C_N = 10nF$, $G_N = 10^{-7}S$ $\frac{n_a}{n_x} = 10$ $\frac{n_c}{n_x} = 1$ $\frac{N_c}{N_x} = 0{,}5$ $\frac{N_a}{N_x} = 0{,}8$

$$C_x = \frac{n_c}{n_x}\cdot\frac{N_c}{N_x}\cdot C_N = 5nF \quad G_x = \frac{n_a}{n_x}\cdot\frac{N_a}{N_x}\cdot G_N = 0{,}8\mu S$$

Měření výkonu

(41.)

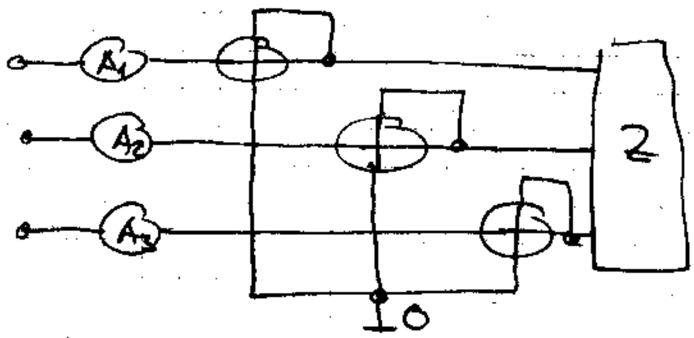


$P = k_w \cdot \alpha - \frac{U^2}{R_N}$

$P = 400 \cdot 2 \cdot \frac{80}{100} - \frac{380^2}{8000} \pm 1{,}5 \cdot \frac{100}{80}\ \%$

$= 621{,}95\,W \pm 1{,}875\ \%$

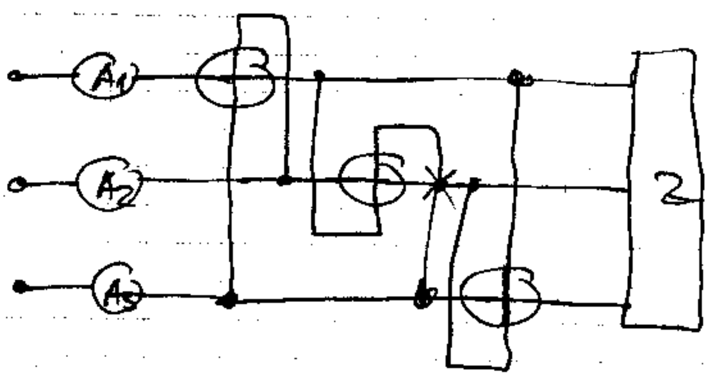
(42)



Rozsah T_p

$P = 240 \cdot 5 \cdot \frac{1}{120} (40 + 100 + 80) \pm 3 \cdot 240 \cdot 5 \cdot \frac{1{,}5}{100} = 2200 \pm 54\,W$

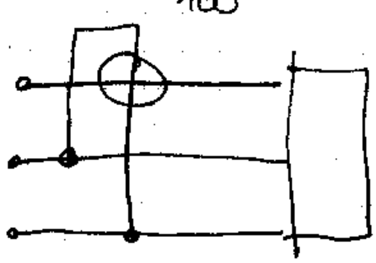
(43.)



$Q = 400 \cdot 5 \cdot \frac{1}{100} (75 + 25 + 20) \frac{1}{\sqrt{3}} \pm 3 \cdot 400 \cdot 5 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1386 \pm 35$

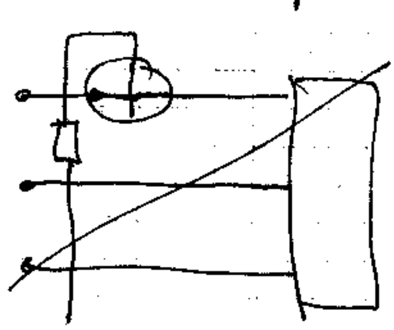
$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

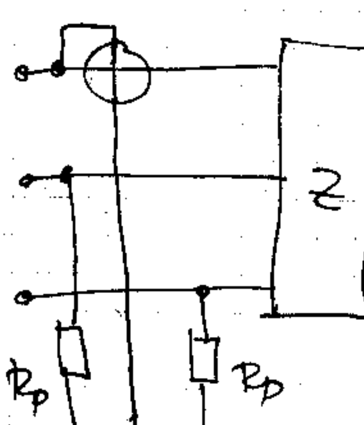
(44).



$P = \sqrt{3} \cdot 240 \cdot 10 \cdot \frac{80}{120} + \sqrt{3} \cdot 240 \cdot 10 \cdot 1{,}5$

(45.)

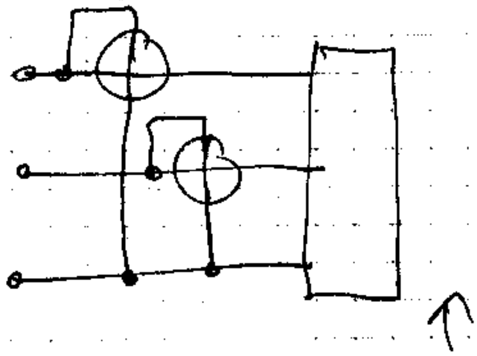




$P = 3 \cdot 300 \cdot 2 \cdot \frac{80}{120} - 3 \cdot \frac{220^2}{4000}$

$\pm 3 \cdot 300 \cdot 2 \cdot \frac{1{,}5}{100} = 863{,}7 \pm 27\,W$

(46)



$$P = W_1 + W_2 = 5 + (-3) = 2\,kW$$

(47) $$P = 500\cdot 2 \cdot \frac{60+80}{100} - 2\cdot \frac{380^2}{10} \pm 2\cdot 500\cdot 2\cdot \frac{0,5}{100} = 1371 \pm 10\,W$$

(48) $$P = 120\cdot 2 \cdot \frac{40}{120} - \frac{120^2}{4000} \pm 120\cdot 2\cdot \frac{1}{100} = 76,4 \pm 2,4\,W$$

$$\left(\pm \frac{2,4}{76,4}\cdot 100 = 3,14\,\%\right)$$

Měření magnetických veličin

49. $\Delta U_2 = 1{,}2V$ $N_2 = 100$ $S_{vz} = 120\ mm^2$ $k_{WB} = 10^{-2}\ Wb/V$

$$B_m = \frac{1}{2}\frac{k_{WB}\cdot\Delta U_2}{N_2\cdot S_{vz}} = 0{,}5T$$

50. $i_R = -i_C$ $\frac{u_1}{R} = -\frac{du_2}{dt}C$ $u_2(t) = -\frac{1}{RC}\int u_1(t)\,dt$

$$\int u_1 dt = RC\Delta U_2 = k\Delta U_2 \quad k = RC \Rightarrow C = \frac{k}{R} = 100\mu F$$

51. $$I_1 = \frac{H\cdot l_s}{N_1} = \frac{H_m}{\sqrt{2}}\cdot\frac{D_1+D_2}{2}\pi\cdot\frac{1}{N_1} = 0{,}4A$$

52. $$H_m = \frac{N_1\cdot I_{ef}\sqrt{2}}{l_s} \quad \mu_A = \frac{B_m}{\mu_0 H_m} = \frac{B_m}{\mu_0}\cdot\frac{l_s}{N_1 I_{ef}\sqrt{2}} = 4202$$

53. $$B_m = \frac{U_s}{4NSf} = \frac{U}{1{,}11}\cdot\frac{T}{4N\frac{\pi d^2}{4}} = 1{,}45\ mT$$

54. $$B_R = B_m - \Delta B = \frac{1}{2}\frac{k_{WB}\cdot U_{int1}}{N_2 S_{vz}} - \frac{k_{WB} U_{int2}}{N_2\cdot S_{vz}} = 0{,}9T$$

55. $$H_m = \frac{N_1 I_m}{l_s} = \frac{N_1 x_m k_x}{R_m\cdot l_s} = 50\frac{A}{m}$$

$$B_m = \frac{k_{WB}\cdot\Delta U_2}{N_2 S_{vz}} = \frac{k_{WB}\cdot k_y\cdot y_m}{N_2 S_{vz}} = 1T$$

Chyby měřicích přístrojů

Analogové – Tp [%]

(př.) Tp = 1,5 , M = 10 V   N = 5 V

$$|\Delta| = \frac{T_p}{100}\cdot M = \frac{1,5}{100}\cdot 10 = 0,15\,V$$

$$|\delta| = \frac{M}{N}\cdot T_p = \frac{10}{5}\cdot 1,5 = 3\,\%$$

Digitální (př.) ±0,01% ± 0,01   M = 10 V   N = 5 V, 4 místa 5 dgt.

(1.)

$$|\Delta| = \left|\frac{\delta_1}{100}\cdot N\right| + \left|\frac{\delta_2}{100}\cdot M\right|$$

$$|\Delta| = \left|\frac{0,01}{100}\cdot 5\right| + \left|\frac{0,01}{100}\cdot 10\right| = 0,0015$$

$$|\delta| = |\delta_1| + |\delta_2|\cdot\frac{M}{N} \quad [\%]$$

$$|\delta| = 0,01 + 0,01\cdot\frac{10}{5} = 0,03\,\%$$

0,01

10,00 V

(2.)

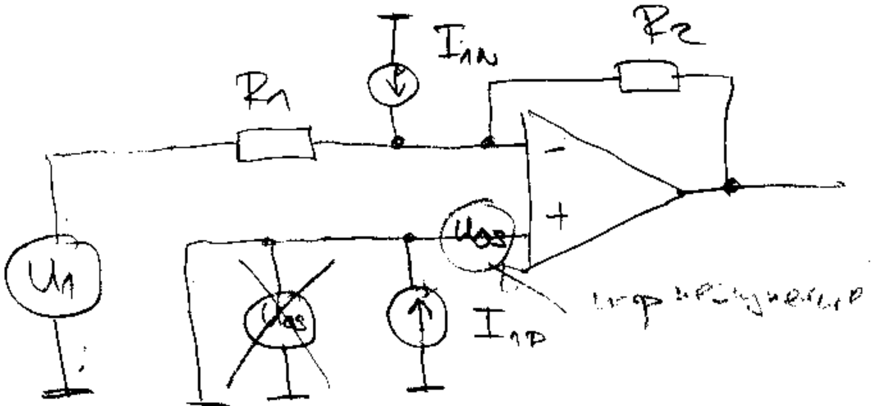
$$|\Delta| = \left|\frac{\delta_1}{100}\cdot N\right| + dgt\cdot 0,01$$

$$|\Delta| = \left|\frac{0,01}{100}\cdot N\right| + 5\cdot 0,01 = 0,0505$$

$$|\delta| = |\delta_1| + \frac{dgt\cdot 0,01}{N}\cdot 100$$

$$|\delta| = 0,01 + \frac{5\cdot 0,01}{5}\cdot 100 = 1,01\,\%$$

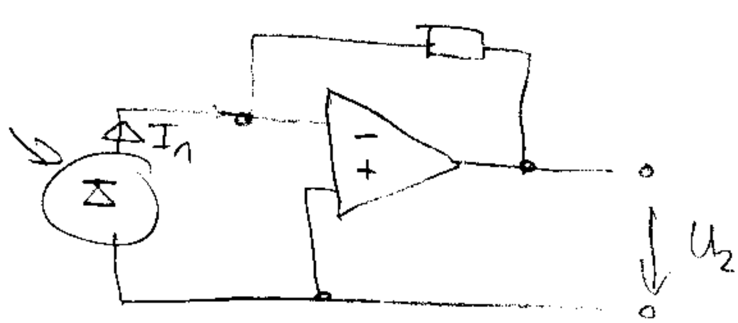
prakticky měříme U_2 střídavým voltmetrem, potom klidové proudy a napěťová nesymetrie se neprojeví



příspěvky všech zdrojů k výst. napětí, do OZ nic neteče

$$U_2 = \underbrace{-U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}}_{\text{id. výstup}} - \underbrace{U_{0S}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}_{\text{neinvertující zapojení}} + I_{1P} \cdot 0 \boxed{- I_{1N} \cdot R_2} \to 0$$

konkrétní příklad



měř. hodnota

$I_1 = 1\,\mu A \to U_2 = 1\,V \qquad \delta R = \pm 0{,}1\,\%$

$$R = \frac{1\,V}{1\,\mu A} = 1\,M\Omega$$

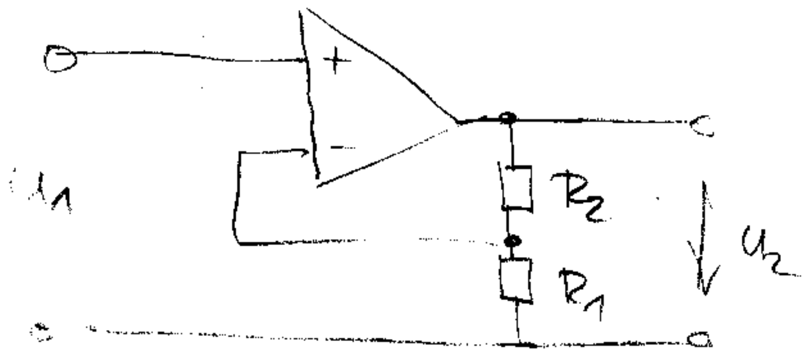
$I_{1N} \leq 2\,nA$ vst. klid. proud (absolutní)

chyba metr.

zadáno

$$I_1 = \frac{U_2}{R} \qquad \delta I_1 = |\delta U_2| + |\delta R| + |\delta I_{OZ}|$$

$$\delta_{OZ} = \pm \frac{2 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^2 \, [\%]$$



$$u_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot u_1$$

$$u_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot u_1 \Rightarrow \delta \frac{u_2}{u_1} = \underbrace{|\delta(R_1+R_2)| + |\delta R_1|}_{\text{chyba převodu}}$$

$$\delta(R_1+R_2) = \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Delta R_1 = \delta R_1 \cdot R_1$$

tohle je teoreticky správně ale chyba je ve skutečnosti menší, lze to počítat

a $\frac{u_2}{u_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$ ~~tedy~~ $\delta\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = |\delta R_2| + |\delta R_1|$

je přesnější převod

$$P = \frac{u_2}{u_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad \Delta P = \underbrace{\Delta 1}_{0} + \Delta \frac{R_2}{R_1} = \Delta \frac{R_2}{R_1}$$

[illegible]

Teorie elektromagnetického pole

Tato kapitola obsahuje pouze několik vyřešených příkladů na vlnu. Než začnete něco podobného řešit je dobré si přečíst příslušnou kapitolu ve výkladových skriptech. Vlna vypadá sice děsivě ale je to jen tupé dosazení do několika pitomých vzorečků, takže to jsou 4 body téměř zadarmo.
Jiné příklady zde nejsou protože všechny příklady z pole jsou k zblití protože se každý řeší jinak, takže pro studium doporučuji skripta s příklady.

Provešení příkladů lze prostudovat skripta str 167-171 pak je to OK

$$k^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0$$

k ... konstanta šíření - vlnové číslo

$k = \alpha - j\beta$

α ... fázová konstanta

β ... měrný útlum

$\sigma \gg \omega\varepsilon$ - vodivé

~~$k = \alpha = \omega\sqrt{\ }$~~

$$k = (1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$E(z) = E_0^+ \cdot e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}$$

$\omega\varepsilon \gg \sigma$ nevodivé

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$k = \alpha - j\beta$ $\quad \boxed{E_0^+ = e^{j\varphi_+} \quad E_0^- = e^{j\varphi_-}}$ - pod. konst.

$$E(z) = E_0^+ \cdot e^{j\varphi^+} \cdot e^{-j\alpha z} \cdot e^{-\beta z} + E_0^- \cdot e^{j\varphi_-} \cdot e^{j\alpha z} \cdot e^{\beta z}$$

$$E(z,t) = E_{0m}^+ \cdot e^{-\beta z} \cdot \sin(\omega t - \alpha z + \varphi^+)$$
$$+ E_{0m}^- \cdot e^{\beta z} \cdot \sin(\omega t + \alpha z + \varphi^-) = \mathrm{Im}\{E(z) \cdot e^{j\omega t}\}$$

fázor intenzity v počátku

$E(z) = E_0^+ \cdot e^{-jkz}$ v kladném směru z $\quad E_0^+ = E_{0m} \cdot e^{j\varphi}$

konst. zhranič. podmín.

$$E(z) = E_0^+ \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{-j\alpha z} = E_{0m} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{-j\alpha z}$$

E_{0m} a φ jsou modul a fáze fázoru E_0

Okamžitá hodnota intenzity je

$$E(z,t) = E_{0m} \cdot e^{-\beta z} \cdot \sin(\omega t - \alpha z + \varphi_0)$$

Fázová rychlost (pohyb vlnoplochy)

$$v_f = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}\{k\}} \qquad v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ v bezeztrát. prostr.}$$

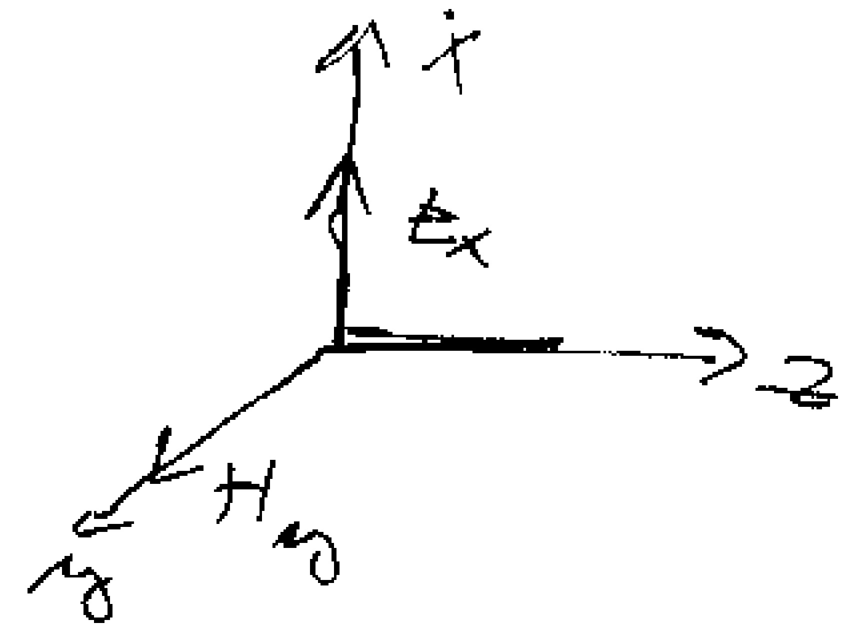
Délka vlny

$$\lambda = \frac{v_f}{f} = \frac{2\pi}{\alpha}$$

Ekvivalentní hloubka vniku

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{|\mathrm{Im}\{k\}|}$$

$$E_x(z) = E_{0x} \cdot e^{-jkz}$$



$$H_y(z) = \frac{k}{\omega\mu} E_x$$

$$Z = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$$

$$E_x = Z \cdot H_y$$

Energie nesená vlnou – Str. hod. Poyn. vekt.

$$S_{str} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{E \times H^*\}$$

$$S_{str}(z) = S_{str}(0) \cdot e^{-2\beta z}$$

Vlny ve vakuu

$\varepsilon \to \varepsilon_0$, $\mu \to \mu_0$, $\sigma \to 0$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c_0} \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \qquad v_f = c_0$$

$\sigma \ll \omega\varepsilon$ $(\sigma = 0)$	$\sigma \gg \omega\varepsilon$
bezeztrátové dielektrikum	$k = (1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$	$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
$\alpha = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, $\beta = 0$	$S_{str} = \frac{1}{2} E_m H_m \cdot \cos\frac{\pi}{4}$
$S_{str} = \frac{1}{2} E_m H_m$	

5.8 $+z$ $\varepsilon_r = 80$, $\sigma = 2\cdot10^{-3}$ S/m, $\mu_r = 1$, $f = 500$ kHz

$E_{max} = 50$ V/m pro $z=0$, $t=0$

$\hat{E}(z) = ?$ $\hat{H}(z) = ?$ $E(z,t) = ?$ $H(z,t) = ?$

pro $t = 10^{-5}$ s, $z = 200$ m, $S_{stř} = ?$

---

1. vyšetření prostředí

$\varepsilon\omega = 80\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\pi\cdot500k = 2{,}2\cdot10^{-3}$

$\sigma = 2\cdot10^{-3}$ $\sigma \doteq \varepsilon\omega \rightarrow$ nelze použít zjednodušené vztahy

konstanta šíření

$\hat{k}^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon+\sigma) = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma = 8{,}78\cdot10^{-3} - j\,7{,}89\cdot10^{-3}$
$= 1{,}18\cdot10^{-2}\cdot e^{-0{,}73}$

$k = \sqrt{\hat{k}^2} = 1{,}09\cdot e^{-0{,}365} = 1{,}01 - j\,0{,}039\ \text{m}^{-1}$

$1{,}01 = \alpha$, $0{,}039 = \beta$

charakteristická imp.

$Z = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon+\sigma}} = \dfrac{\omega\mu}{k} = 36{,}34\cdot e^{j0{,}365}\ \Omega$

fázory intenzit

$\hat{E}(z) = E_0\cdot e^{-jkz} = E_0\cdot e^{-j\alpha z}\cdot e^{-\beta z} = E_{max}\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{-jkz}$

$E_x(t) = \mathrm{Im}\{\hat{E}_x\cdot e^{j\omega t}\} = \underbrace{E_{x\,max}}_{50\ \text{V/m}}\cdot e^{-\beta z}\sin(\omega t - \alpha z + \varphi)$

$t=0$, $\omega t = 0$

$E_x(t) = C\sin(\omega t - \alpha z + \varphi)$, $\omega t \to 0$, $\alpha z \to 0$

$50 = C\cdot\sin\varphi \Rightarrow C = 50$
$\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ ~~$E_x(t) = 50\cdot e^{-\beta z}$~~ $\cdot\sin$

$\Rightarrow E_x(t) = 50\cdot e^{-\beta z}\cdot\sin(\omega t - \alpha z + \frac{\pi}{2})$ $E_0^+ = 50\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\hat{E} = 50\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-jkz} = 50\cdot e^{-\beta z}\cdot e^{-j\alpha z}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ $H = \dfrac{E}{Z}$

~~$H_y(t) = 1{,}37\cdot e$~~ $= 50\cdot e^{-0{,}039z}\cdot e^{j(\frac{\pi}{2}-1{,}01z)}$

$\hat{H} = \dfrac{50\cdot e^{-0{,}039z}\cdot e^{j(\frac{\pi}{2}-1{,}01z)}\cdot 50}{36{,}34\cdot e^{j0{,}365}}$

okamžité hodnoty

$$E_x(t) = 50 \cdot e^{-0{,}0392} \cdot \sin(\pi \cdot 10^6 + \frac{\pi}{2} - 1{,}012) \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$H_y(t) = 1{,}37 \cdot e^{-0{,}0392} \cdot \sin(\pi \cdot 10^6 + 1{,}2 - 1{,}012) \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$

Pre $z = 200\,m$ je

$$\hat{H}_y = 5{,}5 \cdot 10^4 \cdot e^{-j18{,}97}\ A/m \qquad H_y(t) = 6{,}7 \cdot 10^{-5}\ A/m$$

$$\hat{E}_x = 2{,}05 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-j18{,}61}\ V/m \qquad E_x(t) = 4{,}95 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

$$P_{st} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\hat{E}_x \hat{H}_y\right]$$

16.15
PSZ 15.4.2008

$+z,\ f = 10\,MHz,\ \varepsilon_r = 4,\ \mu_r = 1,\ \sigma = 3\,S/m$

v $t=0,\ z=0$ je $\varphi = \frac{\pi}{6},\ E = 5\,V/m$

$H(t) = ?\quad E(t) = ?$ v $t = 1 \cdot 10^{-6}\,s,\ z = 0{,}5\,m$

$$E(z) = E_0^+ \cdot e^{-jkz} \qquad E_0^+ = E_{0max}^+ \cdot e^{j\varphi}$$

$$E(z) = E_{0max}^+ \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-jkz} = E_{0max}^+ \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\alpha z} \cdot e^{-\beta z}$$

$$E(z,t) = E_{0max}^+ \cdot \underbrace{e^{-\beta z}}_{1} \cdot \sin(\underbrace{\omega t}_{0} - \underbrace{\alpha z}_{0} + \underbrace{\varphi}_{\frac{\pi}{6}})$$

pro $t = 0,\ z = 0$

$$5 = E_{0max}^+ \cdot \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow E_{0max}^+ = \frac{5}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow E_{0max}^+ = 2{,}5\ V/m$$

$$E(z) = 2{,}5 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j10{,}88z} \cdot e^{-10{,}88z}$$

$$E(z,t) = 2{,}5 \cdot e^{-10{,}88z} \cdot \sin\left(6{,}28 \cdot 10^7 t - 10{,}88z + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\varepsilon \cdot \omega = 2{,}22 \cdot 10^{-3} \ll \sigma \Rightarrow \text{vodivé}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\cdot\sigma}{2}} = 10{,}88 \qquad k = \alpha - j\beta = 10{,}88 - j10{,}88$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} = \sqrt{\frac{j\,78{,}9}{j\,2{,}22\cdot10^{-3} + 3}}\ \sqrt{\frac{78{,}9 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{3 \cdot e^{j7{,}4\cdot10^{-3}}}} = \sqrt{26{,}3 \cdot e^{j1{,}57}} = 5{,}12 \cdot e^{j0{,}785}$$

$$H(z) = \frac{2{,}5 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j\,10{,}88z} \cdot e^{-10{,}88z}}{5{,}12 \cdot e^{j0{,}785}} =$$

$$H(z) = 0{,}488 \cdot e^{j(\frac{\pi}{6} - 0{,}785 - 10{,}88z)} \cdot e^{-10{,}88z}$$

$$H(z) = 0{,}488 \cdot e^{-j0{,}26} \cdot e^{-j10{,}88z} \cdot e^{-10{,}88z}$$

$$H(z,t) = 0{,}488 \cdot e^{-10{,}88z} \cdot \sin(6{,}28 \cdot 10^{7} t - 10{,}88z - 0{,}26)$$

(14.14) +z $f = 100\,MHz$, $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0\,S/m$

PSZ 27.11.99 v $t = 0{,}1$, $z = 6$ je $S_{stř} = 21\,W/m^2$ bezeztrátové (nevodivé)

E má v $t = 0$, $z = 0$ fázi $\varphi = 1\,rad$

$\omega\varepsilon = 0{,}022$ $\quad \sigma = 0\,S/m$

$$k^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma) = \omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\alpha = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad \beta = 0$$

$$\alpha = 4{,}19 \qquad k = \alpha - j\beta$$

$$E(z) = E_{max} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-jkz}$$

$$E(z) = E_{max} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\alpha z} \cdot e^{-\beta z}$$

$$E(z,t) = E_{max} \cdot \underset{\downarrow\,1}{e^{-\beta z}} \cdot \sin(\omega \underset{\downarrow\,0}{t} - \alpha \underset{\downarrow\,0}{z} + \underset{\downarrow\,1}{\varphi})$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 188{,}4\,\Omega$$

$$S_{stř} = \frac{1}{2} Re[E \times H]$$

$$E(z) = E_{max} \cdot e^{j} \cdot e^{-j4{,}19z} \qquad H(z) = \frac{E_{max}}{Z} \cdot e^{j(1 - 4{,}19z)}$$

$$E(z,t) = E_{max} \cdot \sin(\cancel{\omega t}\ 0{,}2 \cdot 10^{9}\pi t - 4{,}19z + 1)$$

$$H(z,t) = \frac{E_{max}}{188} \sin(\pi \cdot 0{,}2 \cdot 10^{9} t - 4{,}19z + 1)$$

Bezeztrátové dielektrikum!

pro $z = 6$, $t = 0{,}1$ $\sin = 0{,}83$

$$S_{stř} = \frac{1}{2} E_m \cdot H_m = \frac{1}{2}\frac{E_m^2}{Z}$$

ale to je fakt $S_{stř}(z) = S_{stř}(0) \cdot e^{-2\alpha z}$

$$21\,W = \frac{1}{2}\frac{E_m^2 \cdot 0{,}83^2}{188} \rightarrow E_m\ 106\,V/m \quad H_m = 0{,}56\,\frac{A}{m}$$

Výpočetní technika

Úvod do počítačových systémů

Otázky z těchto předmětů se ve zkoušce opakují skoro pořád dokola, zde jsou odpovědi na ty nejčastější, k podrobnějšímu studiu doporučuji slides z UPS

Co je důvodem možné nepřesnosti výsledků aritmetických operací s čísly v pohyblivé řádové čárce? Ukažte též na zjednodušeném příkladu.

Číslo se zobrazí na mantisu a exponent. Mantisa se zaokrouhlí na x platných binárních hodnot.

Uveďte základní principy objekového programování.

Definování vlastností objektu v uceleném bloku. Dědičnost vlastností z otce na syna (bloku otce pouze pozměníme některé vlastnosti, jiné přidáme až máme objekt námi požadovaný). Polymorfismus - hierarchie - komunikace.. Možnost znepřístupnění některých části objektu jiným uživatelům (výhodná obrana proti nechtěným změnám). Přetížené operátory. Vyšší nároky na systémové vybavení počítače.

Jaké znáte způsoby popisu logických funkcí?

Karnaughova mapa, pravdivostní tabulka, Svobodova mapa, algebraický výraz, schéma zapojení logických členů

Jaký je rozdíl mezi instrukcemi shr (posun v pravo) a sar (aritmetický posun vpravo) procesoru 8086.

Posun v pravo posune obsah adresy o n míst doprava prázdné bity nahradí nulami.
Aritmetický posun zaroluje obsahem adresy o n míst. Hodnota bitu na konci se vždy zaroluje na začátek. Hodnota posunovaného bitu se vždy ukládá do CF.

Co znamená přeplnění a nenaplnění v pohyblivé řádové čárce? Co je normalizovaný tvar čísel a proč se používá?

Co je ordinální typ?

Pro ordinální typ jsou definovány funkce ORD, SUCC a PRED, tzn. každé hodnotě x typu T je přiřazeno její ordinální číslo ORD(x). Funkce ORD přitom zachovává uspořádání. Každé hodnotě x typu T je přiřazen i její následník funkcí SUCC(x).
ORD(SUCC(x))=ORD(x)+1 neplatí pro max. hodnotu ORD(x)
Každé hodnotě x ordinálního typu T je funkcí PRED přiřazen její předchůdce PRED(x)
ORD(PRED(x))=ORD(x)-1 neplatí pro min hodnotu ORD(x)
Jedná se typy uživatelem definované a typy integer, bolean, char.

Jaké způsoby náhrady formálních parametrů skutečnými u procedur a funkcí znáte?

Jedná se o parametry volané hodnotou a volané odkazem. Parametr volaný hodnou představuje v těle procedury lokální proměnnou, které je na začátku přidělena hodnota formálního parametru. Pomocí parametrů volaných hodnotou reprezentujeme v proceduře její vstupní hodnoty. Parametr volaný odkazem představuje vždy tu konkrétní proměnnou, která je určena skutečným parametrem a jejíž adresa umístění se vypočte na začátku provádění procedury. Reprezentuje v proceduře její výstupní proměnné.

Jaký bude výsledný obsah registrů po provedení tohoto úseku programu? Jeho původní obsah je al=0Fh?

```
mov    cl,3
shr    al,cl
```

Na počátku je al=00001111b po posunu v pravo o 3 místa je al=00000001b=01h

Kolika různých hodnot může nabývat proměnná typu set of 1..4?

Jedná se o množiny {},{1},{2},{3},{4},{1,2},{1,3},{1,4}{2,3},{2,4},{3,4},{1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4} nebo-li 2n možností.

Jak se liší parametr procedury volaný hodnotou od lokální proměnné?

Dá se přetypovat jinak se snad neliší.

Bistabilní klopné obvody. Uveďte jejich použití a rozdělení. Charakterizujte hranové a hladinové klopné obvody.

Jak jsou zobrazena čísla v tzv. pohyblivé řádové čárce? (Neuvažujte použití tzv. skryté jedničky). Jak se provedou operace sčítání, odčítání? (stačí základní princip.)

Co vše připouští jazyk Pascal jako skutečný para metr procedury v případě, že odpovídající formální parametr je typu T a je nahrazován odkazem?
Každý formální parametr procedury volaný hodnotou představuje v těle procedury lok. Proměnnou, jejíž typ je dán typem formálního parametru a která se na začátku provádění procedury přiřadí hodnota skutečného parametru.
Přípustným skutečným parametrem je proto libovolný výraz, jehož hodnota je kompatibilní vzhledem k přiřazení s typem formálního parametru.

K čemu slouží ve standardním jazyku Pascal hodnoty typu ukazatel?
Hodnoty typu ukazatel slouží k vytváření dynamických seznamů. Jako jsou různé zásobníky, fronty a nebo stromové struktury.
Dynamické proměnné nejsou označeny identifikátorem, ale identifikují se pomocí ukazatelů.

Vysvětlete základní rozdíl mezi kombinačními a sekvenčními obvody
Kombinační obvody - výstupní proměnné jsou funkcí pouze proměnných vstupních
Sekvenční obvody - výstupní proměnné jsou funkcí vstupních a vnitřních proměnných (výstup závisí na „historii", která je uložena v paměťových členech).

Co je programový čítač a co je registr instrukcí? Co obsahují? Co se provádí v rámci základního cyklu počítače (Instrukčního cyklu) a jak se při něm mění obsahy uvedených registrů.

Proč je někdy výhodně specifikovat jako var parametry, které jsou typu pole nebo záznam, přestože se jejich hodnota nemění?
Pokud jsou specifikovány v některé proceduře jako volané hodnotu, musí si počítač reservovat paměťový prostor pro celé pole nebo záznam. Jestliže jsou ale volané jako var parametry, počítač si prostor nevyhrazuje, ale odkazuje se přímo do míst, kde je daná proměnná uložena v paměti.

Kdy je vhodné použít datovou strukturu dvousměrně zřetězený seznam?
Je vhodné ji použít v případě, ze potřebujeme mít vzájemnou návaznost prvků seznamu na sebe. Potřebujeme-li efektivně procházet seznamem z libovolného místa tam i zpět.

Jaký je rozdíl mezi datovým typem pole (array) a záznam (record) v Pascalu?
Datový typ pole array má všechny prvky pole stejného typu, zatímco záznam record může obsahovat prvky různých typů, nebo i typů proměnných viz. Použití příkazu case.

Jak se od sebe liší soubory typu text a typu file of char v Pascalu?
Soubory typu text mají definovány další pomocné znaky jako ukončení řádku a jsou nad nimi definovány další funkce. Soubory typu char se chovají jako soubory kteréhokoli jiného typu.

Co je stránkování a jak se realizuje? Vysvětlete pojmy virtuální adresový prostor, fyzický adresový prostor, stránka, rámec. Kde je uložena tabulka stránek?

Vysvětlete význam segmentových registrů CS, SS, DS, ES procesoru 8086. Na příkladu jednoho z nich, který si vyberete, naznačte jejich použití.
CS - code segment, SS - stack segment, DS - data segment, ES – extra segment

Co všechno je třeba uvést v programu v jazyce Turbo Pascal, abychom mohli číst data z textového souboru jménem MOJEDATA.TXT v aktuálním adresáři?
Var c: text;
assign(c,"mojedata.txt");
reset c;
read ...

Co je přímý kód? Jak jsou v něm čísla zobrazena? Jak se pozná obraz záporného čísla. Jak se v tomto kódu provádí sčítání a jak se při něm pozná přeplnění? (Uvažujte dvojkovou soustavu.)
První bit přímého kódu znamená znaménko, je-li 1 potom je hodnota záporná.

Charakterizujte funkční vlastnosti pamětí RAM, ROM, PROM, EPROM a EEPROM z hlediska uchování uložené informace. které z uvedených typů pamětí se požívají pro konstrukci hlavní paměti počítačů?

RAM - paměť určená pro čtení i zápis - energeticky závislá
ROM - Paměť permanentní -obsah je určen při výrobě
PROM - paměť permanentní - jednorázové naprogramování
EPROM - paměť semipermanentní - obsah určen naprogramování, lze ji vymazat a přeprogramovat UV zářením.
EEPROM - elektronicky programovatelná
Kromě paměti RAM jsou ostatní energeticky nezávislé.
Pro konstrukci počítače slouží paměti RAM a ROM.

Vysvětlete, co je proměnná (parametr) typu procedura a k čemu se používá.

Při psaní nekterých procedur a funkcí je užitečné považovat za parametr nejen datové objekty s nimiž procedura (funkce) pracuje, ale též některé dílčí akce, které mají být uvnitř procedury (funkce)použity. K tomu slouží procedurální a funkcionální parametry. Příklad procedury s procedurálním parametrem.
PROCEDURE proc(x:REAL;PROCEDURE fp(fx:INTEGER; VAR fy:REAL));
Přípustným skutečným parametrem je v případě procedurálního parametru identifikátor procedury, jejíž parametry jsou téhož druhu a téhož typu jako odpovídající parametry formální procedury. V případě funkcionálního parametru, se dále požaduje aby typem skutečné funkce byl týž jako typ formální funkce. Jako skutečné parametry nemohou být použity identifikátory standardních procedur a funkcí.

Vysvětlete, co jsou syntaktické diagramy a k čemu slouží.

Syntaktické diagramy jsou grafickým vyjádřením problému, tak jak jej lze po částech řešit. Slouží k názornému vysvětlení principu programu, případně je možné podle něj sestavit daný program v některém z programovacích jazyků.

Vysvětlete funkci následujícího fragmentu programu pro mikroprocesor I8086 a okomentujte jednotlivé instrukce:

```
            ...
            ...
NOVEMAX:    mov   AL,[SI]      ; Přiřadí do AL hodnotu kam ukazuje ukazatel SI
            mov   DX,SI        ; Přiřadí do DX hodnotu SI
DALSIPRV:   dec   CX           ; Sníží hodnotu CX o jedničku
            jz    KONEC        ; Pokud je hodnota CX rovna nule, tak skočí na KONEC
            inc   SI           ; Zvýší hodnotu SI o jedničku
            cmp   AL,[SI]      ; Porovná hodnoty AL s další hodnotou, na kterou ukazuje SI
                               ; (provede jejich rozdíl a nastaví FLAGGS
            jb    NOVEMAX      ;  Zjistí hodnotu CF a pokud je jednička, tak byl rozdíl
                               ; záporné číslo a proto skočí na NOVEMAX
            jmp   DALSIPRV     ; Skočí na DALSIPRV
KONEC:      ...                ; Návěští KONEC:
```

Proč musí být v deklaraci typu ukazatel uveden doménový typ.

Dynamická proměnná nemá přidělen identifikátor, ale identifikuje se pomocí hodnoty zvláštního typu, kterou nazýváme ukazatelem a kterou lze považovat za abstrakci adresy umístění dynamické proměnné v paměti. Každý typ ukazatel je vázán na jeden typ dynamických proměnných, který se nazývá doménový typ ukazatele a určuje se v popisu ukazatele. Jde o to, aby počítač věděl s jakým typem má co do činění.

Jaké operace jsou charakteristické pro datový typ fronta?

PUSH - uloží prvek na začátek seznamu
POP - odebrání prvku z konce seznamu
kontrola naplnění
inicializace
výpis prvků

Vysvětlete rozdíl mezi logickými obvody se standardním výstupem, třístavovým výstupem a s výstupem s otevřeným kolektorem.
Klasickému standardnímu odpovídá kladná logika výstupu / jedničce odpovídá vyšší napětí
Obvodu s otevřeným kolektorem odpovídá záporná logika / jedničce odpovídá nižší napětí.
Třístavový výstup má navíc ještě hodnotu vysoké impedance. (0,1,Z).

Co je doplňkový kód? Jak jsou v něm čísla zobrazena? Jak se pozná obraz záporného čísla? Jak se v tomto kódu provádí sčítání a jak se při něm pozná přeplnění? (Uvažujte pouze dvojkovou soustavu.) Najděte obrazy čísel -3 a -6 a obraz jejich součtu v doplňkovém kódu, pro tuto reprezentaci uvažujte čtyřbytovou řádovou mřížku.

Vysvětlete rozdíl mezi překladačem a interpretem.
Překladač převádí zdrojový program do instrukcí cílového počítače, přeložený program potom sestaví s knihovnami a pak umožní spuštění programu. Interpret přímo provádí instrukce zdrojového jazyka a knihovny jsou jeho součástí.

Vysvětlete pojem podtečení při aritmetických operacích.
Podtečení nastává, pokud je nenulový výsledek menší než nejmenší zobrazitelné číslo, výsledek je potom nula.

Co je to operační systém a jaká je jeho funkce.
Je to souhrn programových modulů, které řídí práci počítače spouštějí a zastavují běh jednotlivých programů, předělují jim technické prostředky počítače (např. Periferní zařízení) a zajišťují obsluhu těchto prostředků.

Jaký je rozdíl mezi Frontou a spojovým seznamem.
Fronta je datová struktura organizovaná tak, že přicházející informace je ukládána na konec posloupnosti, ze které je možné informaci vybírat z jejího počátku. Spojový seznam je struktura, v níž místo ukládání a výběru není určeno pevně, ale pomocí ukazovátka, oproti frontě lze u seznamu ukazovátkem pohybovat.

Co to je modul a jaká je struktura modulu v Turbo Pascalu?
Modul v sobě zahrnuje předdefinované konstanty, typy, proměnné, procedury a funkce, modul si může uživatel vytvářet sám nebo používat již předem vytvořené systémové moduly, moduly=jednotka+program (samostatné soubory v překládání).
Struktura modulu:
Unit (název modulu)
Interface - deklarace viditelné pro ostatní moduly nebo programy, které tento modul využívají.
Uses - umožňuje odkazovat se vzájemně mezi dvěma moduly. - nepovinné -
Implementation - definují se zde pomocné funkce a proměnné a jsou zde uvedena těla funkcí a procedur deklarovaných ze sekce interface.

Jaký je rozdíl mezi zobrazením čísel v pevné a pohyblivé řádové čárce?
Hodnoty typu real se v paměti počítače zobrazují jako čísla v pohyblivé řádové čárce, tj. jako dvojice (M,N), kde M je mantisa a N je exponent. Číslo = M*10N

Jaký je rozdíl mezi počítačovou a aritmetikou typu integer a aritmetikou celých čísel?
Rozsah čísel typu integer je omezen hodnotou maxint (u 16 bitových počítačů je maxint = 215), v případě jejího překročení může dojít k přetečení.

Co je to editor?
Zabezpečuje práci s textem: vkládání, rušení a přepisování textu, pohyby kurzoru, práce s úsekem textu, vyhledávání a náhrada textu apod.

Proč při programování používáme procedury?
Každý složitější mechanismus je třeba řídit hierarchickým způsobem. Spočívá to v zavedení systému vrstev tak, že vyšší vrstvy pracují s obecnějšími informacemi, zatímco nižší se zabývají detaily, lepší orientace a přehlednost.

Vysvětlete rozdíl mezi sekvenčním a přímým přístupem k souboru.
Sekvenční přístup je přístup postupný, složky souboru nelze zpracovávat v libovolném pořadí. Přímý přístup umožňuje přístup ke složkám v libovolném pořadí (nastavení procedury seek).

Jaké jsou základní části počítač von Neumannova typu?
Operační paměť, procesor, přídavné zařízení, řadič.

Jaké znáte strukturované typy v Pascalu?
Pole, záznam, množina, soubor

Vysvětlete rozdíl mezi zásobníkem a seznamem.
Do zásobníku se ukládají určité prvku a odebírají se v opačném pořadí, odebírán je vždy poslední vložený prvek systém LiFo. U seznamu je to systémem FiFo.

Vysvětlete rozdíl mezi datovým typem real a množinou reálných čísel.
Množina hodnot typu real je konečnou podmnožinou reálný čísel. Je omezena rozlišovacími schopnostmi počítače a maximální a minimální hodnotou.

Vysvětlete při kterých aritmetických operacích dochází k podtečení.
Je to u aritmetický operací používaných v typu real.

Vysvětlete rozdíl mezi jednorozměrným polem a spojovým seznamem jazyku Pascal.
Pole se skládá z pevného počtu složek. Spojový seznam se neskládá z pevného počtu složek.

Vysvětlete pojem proměnná.
Je to datový objekt, který má své jméno a hodnotu, obor přípustných hodnot je dán typem proměnné, kterým je rovněž stanoveno, jaké operace můžeme s proměnnou provádět, hodnotu proměnné definuje přiřazovací příkaz nebo příkaz vstupu.

Jaké jsou etapy řešení úloh na počítači?
Definice problému (vstupní, výstupní údaje ...)
nástin řešení
sestavení algoritmu (vývojové diagramy, ...)
kódování programu (zápis algoritmu v programovacím jazyce)
ladění programu (odstranění chyb)
zpracování dokumentace a udržování programu

Kolik různých hodnot lze zobrazit ve slově dlouhém 2 byty?
2 byty = 16 bitů .... n = 215 hodnot.

Co je syntaxe a sémantika programovacího jazyka?
Syntaxe je souhrn pravidel udávajících přípustné tvary dílčích konstrukcí a celého programu. Sémantika udává význam jednotlivých konstrukcí.

V čem se liší vyšší programovací jazyky od strojově orientovaných jazyků?
Programování ve strojovém kódu je velmi pracné a napsané programy nejsou přenosné na jiný typ počítače, lépe využívají ale procesor a operační paměť.
Vyšší programovací jazyky obecně nejsou závislé na typu počítače a na operační systému.

Jaké vlastnosti má algoritmus?
Má být hromadný (aby vycházel z měnitelných vstupních údajů), dekorministický (aby byl každý krok jednoznačně definován), konečný a resultativní (aby po provedení konečného počtu kroků vedl k požadovaným výsledkům.

Vysvětlete rozdíl mezi pamětí RAM a ROM.
RAM - umožňuje libovolný přístup k jednotlivým buňkám (čtení + zápis)
ROM - lze z ní pouze číst, pevná PROM - programovatelná 1x, EPROM - el. Programovatelná smazaní UV záření.

SEZNAM – posloupnost údajů, do níž můžeme přidávat nové údaje, nebo rušit. Operace: vytvoř nového, vložení, zrušení, nastavení na zač., na konec, posun ukaz. na další prvek. Implementace: pomocí pole, dvou zásobníků, ukazatelů.
TABULKA – při výběru přihlížíme k obsahu lož. inf. = asoc. pam.
STROMY – vyjádř. hierarch. vazby mezi zprac. objekty.
SBĚRNICE – soustava vodičů, slouží ke komun. mezi perif. (paměť, i/o brány, radiče atd.) Adresová část – slouží k určení jednotky. Datová část – přenos dat. Řídící část – povely řídícího char. (směr přenostu, rozliš. paměť či perif prostoru, signalizace žádosti o přeruš. a povolení)
ŘADIČ – řídící jedn. poč. Sekv. obvod – vstupy :stavové sign., výstupy: řídící signály. Zákl. cyklus:
Start – Init – ReadInstr - <OZ> - operace 0,1... – inter? [ano- obsl.], ne+ano – ReadInstr.
CACHE – mezi proc a oper.pam. menší rychlejší. naplň.se údaji z oper. pam. (inst., oper.)., adresa v oper. pam (slouží jako klíč pro vyhled dane inf. v cache). Asoc. pam. – výběr podle části ulož inf. (klíče)
PROGR.ČÍTAČ+REG.INSTR.+CYKLUS –RI obs.prováděnou.instr. (co,kam,kde,s čím). IP-adr. násled. instr. segmentace (úspora HP). adr = posun. + 16xseg. Cyklus – Reset -> inic -> read (cpu vyšle adr., paměť vyšle instr., cpu ji dekóduje) -> vykon.
PŘERUŠENÍ – vnější –perif., havar.. vnitřní – chyby oper. Reakce: Rozhodnutí o obsluze, ident. příčíny, ulož. CS,IP,Flags do zás., nalez. adr., převed. obluhy, IRET
STRÁNKOVÁNÍ (virt., fyz., str. rámec) – virt. adr. prostor – úseky pevné délky (stránky). fyz. adr. – stejně velké úseky (str. rámce). Virt. ve vnější pam. tabulky stránek. Stránkování – pokud je str. přítomna v hl. pam. přemění se její virt. adr. na fyz.; není-li, vyvol. se přer., načte se str z vnější pam.; pokud není volný rámec, jeden se uvolní
RAM,ROM... –energ. záv. ram,sram,dram. nezáv. : perman. – rom, prom. semiperman – eprom, eeprom). HP = DRAM
HIERARCH.PAMĚŤ SYST. - = několikaúrovňové uspoř. pamětí různých kapacit a rychlostí. cíl – max výkon. Cena je přímo úměr. kapacitě, nepřímo době příst. Tabulka: registry(ko, ns), cache(sram, 10ns), hp (dram, 50ns), vp(DISK), záložní. Virt. paměť – několik pamětí různých param. řízených aby vytvář. pamět prostory potřebné velikosti pro programy a pro data. Umožňuje – real. 1 nebo více virt. adr. prostorů; úspor. HP; přemístění částí v HP bez nutnosti je znovu překládat; ochrana. Virt. pracuje z virt. adr. HP pracuje s fyz.
SČÍTAČKA ODČÍTAČKA 4.bit v doplň – D(x) = x, x≥0, M+x, x<0. 4.bit. M=2^4. – ½M ≤ x ≤ ½M (-1 = 1111). Sčítačka: a0b0 => Σ => s0. nejvyšší řád : p*q NAND = overfl. Odčítačka: stejný, ale b jsou negovaný
PŘÍMÝ KÓD – |X| < ½M (-1 = 1001)
ČÍSLA V POHYBL. ČÁRCE – A=m*z^e. exponent je největší možný – přeplnění. nejmenší – nenaplnění. Normalizace – není možné posunout mantisu doleva (jednodušší alg.)
DOPLŇ. KÓD v 10 SOUST. – D(-x) = 999-D(x)+1
PROMĚNNÉ: int, real, bool, char, ord (fce ord, succ, pred, znaky mají své ord. číslo), interval (podmnož. hodnot ordin. typu), výčtové
DYNAMICKÉ PROMENNÉ – přímá adresace proměnných – přístup k proměnným prostřednictvím jejich identifikátorů. nepř. přístup – předpoklad je, aby adresa mohla být hodnotou proměnné. není určen pro deklarované proměnné, ale pro tzv. dynamické proměnné – vznikají pri výpočtu provedením zvláštního příkazu. Proměnná typu ukazatel: hodnota adresa, každý typ ukazatele umožňuje referencovat pouze proměnné urč. typu. př. type refint = ^integer var p,q: refint. Přiřazení hodnoty proměnné typu ukazovatel je spojeno s vytvářením dyn. prom. NEW(P)
PROCEDURY – hierarch. členěný program. Lokál. proměnné – jen pro potřeby procedury. Nelokál – proc. komunikuje s okolím. Procedury s parametry: formální parametr – zavádí se v hlavičce programu, skutečný parametr – skutečná proměnná kterou se má formální parametr nahradit při vyvolání proc.(uvádí se v příkazu), parametry nahrazované odkazem (var X:int) – formální par se nahrazuje proměnnou, která je uved. jako skuteč. param. Parametry nahrazované hodnotou: lok. prom. typu T, které se přiřadí poč. hodn. urč. skuteč. param. Použ – převést do proc. určitou vstupní hodn, ze které výpočet vychází Procedure PROC (x:int; y:int; var z:int) do z se uloží hodnota z PROC
FUNKCE – výsledkem je jediná hodnota
A=FCE(X,Y). REkurzivní: výhody: přehledné, nevýhody: pomalejší
STRUKTUROVANÉ TYPY – Pole: array [typ indexu] of typ. Vynulování všech prvků : for i:=1 to 5 do a[i]:=0

Binární pole: K:=(D+H) div 2. Vícerozměrná : [1..5, 1..5] Pole jako parametr: pro řeš. vektorů, matic.. Typy řetězce: řetezec délky n: packed array [1..n] of char

type slovo= packed array [1..10] of char;

var jmeno, prijmeni: slovo.

Write (jmeno:5) vytiskne prvních 5 znaků

ZÁZNAMY – zázn.se může skl. ze složek různého typu.

typ str=packed array [1..max] of char

var student: record jm:str; prijm:str; atd. end; zápís: student.prumer:= 1.5. Mohou být použíty jako param. proc. a fcí.

MNOŽINA – z každého ordinálního typu T můžeme vytvářet typ množina z T : set of T. Hodnotami tohoto typu jsou všechny množiny vytvářene z hodnot typu T. Typ T se nazývá bázovým typem daného typu mn.

type den=(po, ut, st...) ; tyden= set of den; zn=set of char;

var samohl: zn; cisla: set of 0..255. Zápis: cisla:= [2,9,5]. Konstruktor mnoziny: Výraz vyjadřující konstrukci množiny z jejich prvků [1,2,4] [`a`..`z`] [0,1,2...9]

SOUBOR – posl. složek stejného typu, počet není omezen, složky lze číst nebo vytvářet pouze postupně od začátku. Při provádění programu je každé proměnné typu soubor přiřazen fyzický soubor ulož např. na disku. Z hlediska ex. fyz. souboru se dělí na vnější (trvalé), vnitřní (dočasné). <u>Typ soubor</u> – file of typ složek. např. program cisla(input, output) var A:int; zaporna: file of integer ... Přístupová proměnná souboru – tzv. okénko do souboru ve kterém se při čtení objevují hodnoty jednotl. složek a při vytv. zapisujeme nové složky. Postupné čtení: reset(s) – otevření souboru pro čtení. posun okenka na další složku get(s). vytváření souboru rewrite (s). zápis nových složek put (s)